

学校代码：10251

学　　号：030120120

華東理工大學

硕士学位论文

论文题目：带跳的随机微分方程近似解的收敛速率

学科专业：应用数学

研究方向：金融数学与随机微分方程

论文作者：王臻臻

指导教师：秦衍 副教授

定稿日期：2014 年 11 月 20 日

学位论文使用授权声明

本学位论文作者完全了解学校有关保留、使用学位论文的规定，同意学校保留并向国家有关部门或机构送交论文的复印件和电子版，允许论文被查阅和借阅。本人授权华东理工大学可以将本学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存和汇编学位论文。保密论文在解密后遵守此规定。

论文涉密情况：

☑ 不保密

☐ 保密，保密期（___年___月___日 至___年___月___日）

学位论文作者签名：卫臻琫　　　　指导老师签名：[签名]

日期：2015年1月9日　　　　日期：2015年1月9日

分类号：O29　　　　　　　　密级：

UDC：51

华东理工大学

学位论文

带跳的随机微分方程近似解的收敛速率

王臻臻

指导教师姓名：秦衍 副教授

华东理工大学

申请学位级别：硕士　　　　专业名称：应用数学

论文定稿日期：2014年11月20日　论文答辩日期：2015年1月9日

学位授予单位：华东理工大学

学位授予日期：2015年3月20日

答辩委员会主席：李建奎 教授

评阅人：夏宁茂 教授

薛以峰 教授

作 者 声 明

我郑重声明：本人恪守学术道德，崇尚严谨学风。所呈交的学位论文，是本人在导师的指导下，独立进行研究工作所取得的结果。除文中明确注明和引用的内容外，本论文不包含任何他人已经发表或撰写过的内容。论文为本人亲自撰写，并对所写内容负责。

论文作者签名：王臻臻

2015年 1月9 日

带跳的随机微分方程近似解的收敛速率

摘要

本文给出了三种求解带跳的随机微分方程的数值解法。首先针对一类带跳的 *Itô* 型随机微分方程，给出了基于 Euler-Maruyama 法的 Split-step 算法，在方程的系数满足 Lipschitz 条件和线性增长条件，且时滞函数满足某种连续的条件下，证明了 Split-step 算法的收敛速率为 $\alpha\wedge\gamma\wedge\frac{1}{2}$。其次，对不含有时滞项的随机微分方程的建立了 $SS\theta$ 算法，证明了当方程的系数满足 Lipschitz 条件和线性增长条件时，$SS\theta$ 算法近似解的收敛速率是 $\frac{1}{2}$。随后，将 $SS\theta$ 算法推广到了带时滞的随机微分方程，证明了带时滞的带跳随机延迟微分方程近似解的收敛速率也是 $\frac{1}{2}$。最后，应用 $Itô-Taylor$ 展开公式对带跳随机微分方程作二阶展开，构建了 Split-step 一阶近似算法，其收敛速率为 1。对上述算法都给出了一些数值实例来验证算法的有效性。

关键词：Split-step 算法，$SS\theta$ 算法，$Itô-Taylor$ 展开式，全局误差，泊松跳

Convergence rate of numerical solutions to SDEs with jumps

Abstract

Three numerical methods for solving a stochastic differential equation with jump are given in this paper. Based on the Euler-Maruyama method, we introduce the Split-step method to a class of the stochastic differential equation with jump. We prove that it is convergence under the Lipschitz condition, the linear growth condition and some continuous conditions of the delay function. The convergence rate of Split-step numerical solutions to the stochastic differential equation with jump has order $\alpha \wedge \gamma \wedge \frac{1}{2}$. Then we discuss the $SS\theta$ method of the stochastic differential equation without delay. We also show that its convergence rate has order $\frac{1}{2}$ under the Lipschitz condition and the linear growth condition. Next, we expand the conclusion to the stochastic differential equation with delay. We obtain that it is convergence rate $\frac{1}{2}$ of $SS\theta$ numerical solutions to the stochastic delay differential equation with jump. Finally, using $It\hat{o}-Taylor$ expansion, we obtain the first-order approximate numerical solutions of the stochastic differential equation with jump. And the rate of convergence is 1. Numerical experiments are simulated to testify the performance and the effectiveness of the above method.

Keywords: Split-step method, $SS\theta$ method, $It\hat{o}-Taylor$ expansion, global error, Poisson jump

目录

第1章 绪论 1
第2章 带跳的变时滞随机微分方程裂步法近似解的收敛速率 6
2.1 全局误差的收敛速率 7
2.2 数值模拟 22
第3章 带跳的随机微分方程 $SS\theta$ 法近似解的收敛速率 25
3.1 近似解的估计 26
3.2 收敛速率 30
第4章 带跳的随机延迟微分方程 $SS\theta$ 法近似解的收敛速率 35
4.1 近似解的估计 36
4.2 收敛速率 41
第5章 带跳的随机微分方程裂步法一阶近似解的收敛速率 47
5.1 基于 $It\hat{o}-Taylor$ 展开的 Split-step 算法 47
5.2 Split-step 算法的收敛速率 53
第6章 总结与展望 63
6.1 总结 63
6.2 展望 63
参考文献 64
致谢 68

第1章 绪论

三百多年前，牛顿(Newton，1642-1727)和莱布尼兹(Leibniz，1646-1716)创立了确定性的微积分，对机械动力学、天文学等领域的物理现象进行定量分析和研究。随后，微分方程被广泛用于刻画事物发展的运动规律。然而在诸多实际物理问题中，依据一个物理问题来构造数学模型，即把一个物理问题转换成一组数学方程，但是有时可能无法用一个确定性方程来描述物理问题。这是因为物理问题的随机性和复杂性不可避免地给数学模型带来一些不确定性因素。这种影响可以是来自系统本身的不确定性，也可以来自系统所处环境的不确定性。例如在信号传输过程中，信道存在噪声；现代资本市场理论认为股票期货价格具有随机性等等，所以随机因素的影响是存在的。1902年，Gibbs在研究统计力学问题过程中首次提出了随机微分方程模型。

1918年，Wiener对Brown运动在理论上作出了精确的数学描述，从而建立了用随机过程语言描述的严格的数学模型，通过对Brown运动轨道的性质深入研究，提出了在布朗运动空间上的测度和积分，这些工作使得布朗运动及其研究得到了迅速而深入的发展。由于Brown运动也用来专指Wiener过程的数学模型，因此Brown运动也称为Wiener过程。1923年，Brown就Brown运动给出了一系列严格的研究成果。

1934年至1938年S.Bernstein正式引入了随机微分方程，并证明了该方程所确定的随机变量的极限分布是Kolmogorov方程的基本解。随后Gihman在S. Bernstein的框架下，建立了随机微分方程的相关理论。1942年Itô在常微分方程的基础上加上一个随机干扰项(即Wiener过程)讨论了如下形式的随机微分方程

$$\begin{cases} dX(t)=f(t,X(t))dt+g(t,X(t))dW_t, & t>0 \\ X(0)=X_0, \end{cases}$$

通过对随机微分方程的研究得到了关于Markov过程的Kolmogorov方程，1944年建立了与常微分理论中的Riemann—Stieltjes积分不同的Itô积分，即关于Wiener过程的随机积分，并于1951年，发表了具有划时代意义的著作《On stochastic differential equations》。随机积分为随机微分方程的发展开辟了新的天地，而且为随机分析这门数学新分支的创立和发展奠定了基础，这个理论被誉为“随机王国中的牛顿定律”。

之所以说Itô积分为随机分析的创立和发展的基础，是因为对于更接近物理直观的郎之万方程

$$dX_t=\frac{g}{m}dW_t+\alpha dt,$$

这类的扩散方程是很有吸引力的。可惜的是布朗运动W_t对几乎所有的轨道处处不可微，所以从数学上来讲dW_t不能按照一般的想法定义积分。但是自从伊藤清给出了积分的定义和随机积分(微分)方程后，可以用随机积分(微分)方程

$$X_t = X_0 + \int_0^t a(s,X_s)ds + \int_0^t b(s,X_s)dW_t$$

的解来表示扩散过程。至今，由伊藤清开创的随机微积分不仅适用于扩散过程，而且适用于一大类非常广泛的随机过程——半鞅，成为随机分析的有力工具。

可以说，随机微分方程在金融系统、数量经济、控制系统、统计物理、系统生物学中都有着非常重要的作用[1-4]。例如，用随机微分方程来解决期权定价问题。1973 年，Fischer Black 和 Myron Scholes 利用无风险投资理论和随机微分方程理论，得到了著名的 Black-Scholes 随机微分方程：

$$\begin{cases} dX(t) = \mu dt + \sigma dW_t, \\ X(0) = X_0, \end{cases}$$

并利用相应的边界条件和概率方法得到了欧式看涨（跌）期权价格的计算公式，开拓了金融工程从定性分析进入定量分析的时代。但是由于随机系统本身的复杂性，一般情况下很难得到方程理论解的显示表达式，只有一些特殊的随机微分方程才能求出其解析解，因此人们只能通过数值方法来研究方程的解及其性质。故对随机微分方程数值求解方法的研究是有意义的。衡量一个数值解法的好坏主要基于三个方面的考虑：（一）数值解法的收敛速度，即数值解逼近真解的快慢；（二）数值解法的计算复杂度；（三）数值解法是不是能够很好保持原系统固有的性质，诸如稳定性，散逸性(指系统具有一个有界吸引集,从任意初始条件出发的解经过有限时间后进入该吸引集并随后保持在里面)，守恒性质，随机情形的不变测度等等。

随着数学家们的不懈努力和计算机计算能力的快随提升，对随机微分方程的数值求解得到了很大的进展[5-10,18,19]，对于 Itô 型随机微分方程的数值求解有许多研究，按算法分类主要有：

- **Euler** 方法 Burrage[11]等人讨论了处理刚性随机系统的复合 Euler 方法，证明了该方法对于非线性方程同样有效。Zhang[24]等人讨论了线性随机微分延迟方程的裂步倒向 Euler 法，证明了该方法的收敛阶数为 $1/2$，给出了不同情况下对于步长取值的限制。Gardón [25]讨论了对于给定的 $\gamma = \{0.5,\ 1,\ 1.5\ \ ......\}$，带跳的随机微分方程 Euler 法的随机 Taylor 展开式的 1 阶显式，并证明了强 Taylor 近似解的收敛阶数为 1。Feng[26]等人讨论了带跳随机微分延迟方程的强 Taylor 展开法。Wang[27]等人讨论了带跳随机微分延迟方程的半隐式 Euler 法，证明了该算法的收敛性和稳定性。

- **Euler–Maruyama** 法 Wang[14]等人讨论了正向的裂步 Euler–Maruyama 法和裂步 Milstein 法，并证明了改进后的方法比原始方法更稳定。Liu 和 Li [20], Kubilius 和 Platen [21]以及 Protter [22]等人研究了 Euler–Maruyama 法的弱收敛性。Bao [28]等人证明了对于 $\forall p \geq 2$，Euler–Maruyama 法数值解的 p 阶收敛速率为 $1/p$。Bao [29]等人讨论了一类随机延迟微分方程的 Euler–Maruyama 法，此类方程的时滞项系数可以不满足线性增长条件，

且证明了该算法在布朗运动情形下的收敛阶数为1/2，纯跳情形下的均方收敛阶数为1/2。

● **Milstein 法** Omar[13]等人讨论了随机微分方程的复合 Milstein 法，通过一个指标函数来决定计算中的每一步是采用半隐式 Milstein 法或隐式 Milstein 法。Higham [15]通过作图的方法给出了线性方程的随机 θ 方法和半隐式 Milstein 法的均方稳定区域。张雨馨[43] 考虑随机微分方程 Milstein 方法的几乎必然及矩指数稳定性,给出了当步长趋于零时极限意义下随机微分方程 Milstein 方法的稳定性,并证明了在一定条件下显式和半隐式 Milstein 方法都具有这些稳定性。李启勇[44] 研究了随机微分方程改进的半隐 Milstein 方法的均方稳定和渐近稳定性。对线性检验方程，得到了改进的半隐 Milstein 方法均方稳定的充要条件是 $\frac{3}{4} \leq \theta \leq 1$。对任意步长 $\Delta > 0$，证明了当方法的步长充分小时，方法能保持原系统的渐近稳定性。郭谦[50] 给出一个新的求解线性随机时滞微分方程的显式分裂步长 Milstein 格式，运用 Ito-Taylor 展开式证明该格式相对于已有的求解随机时滞微分方程的分裂步长方法而言具有更好的收敛性。

● θ **方法** Ding[16]等人讨论了基于 Euler–Maruyama 法的随机 θ 方法，并证明了该方法的收敛阶数为 1/2 以及稳定条件。Safique[17]等人讨论了刚性随机微分方程的全隐式随机 θ 法，通过参数 θ 来调节该方法的稳定区域，并且通过数值算例阐释了不管是对于普通的线性方程还是化学郎之万方程亦或 Duffing-van der Pol oscillator 模型，全隐式随机 θ 法都优于现存的方法。Wang[23]等人讨论了带跳的随机微分方程的补偿 θ 方法，通过变换将 θ 方法扩展到了带跳的情况，证明了该方法的收敛阶数为1/2，同时也考虑了算法的均方稳定的性质。周立群[39]等人研究了线性随机延迟微分方程复合 θ 方法的收敛性。

● **随机 Runge-Kutta 方法** Wang[12]讨论了 Stratonovich 随机微分方程的三阶强 1 阶的随机 Runge-Kutta 方法，并具体写出了一个显式三级随机 Runge-Kutta 方法和一个半隐式三级随机 Runge-Kutta 方法。针对 Itô 型随机微分方程，Tocino 和 Vigo-Aguiar[32] 给出了随机 Runge-Kutta 方法弱 2 阶条件。2006 年，Rößler[33] 给出了针对 Itô 型随机微分方程随机 Runge-Kutta 方法弱意义下的系数条件，并且显式得到了一些新的 2 阶随机 Runge-Kutta 方法。2009 年，Debrabant 和 Rößler[34]给出了一类更为有效的 2 阶随机 Runge-Kutta 方法。

● **Taylor 方法** 1982 年 Platen 和 Wagner[35]对随机 Taylor 方法的各种收敛性给出了理论研究；1992 年 Kleoden 和 Platen[6]依据半鞅 Itô 公式给出了随机 Taylor 展开式的构造过程，同时指出了随机 Euler 方法可以看成是对随机 Taylor 展开式在 0.5 阶处的截断，Milstein 法可以看成是对随机 Taylor 展开式在 1 阶处的截断，而求解 Stratonovich 型随机微分方程的随机 Runge—Kutta 方法[36]也是基于随机 Talyor 展开式而得到的。2001 年 Tian 和 Burrage[37]研究了与 Euler 方法、Milstein 方法和 1.5 阶随机 Taylor 方法相对应的三种隐式随机 Taylor 方法。

- **Split-step 算法**贾俊梅[41]给出随机微分方程的 Split-step 欧拉格式的算法，并证明了当方程的偏移系数和扩散系数均满足线性增长条件和李普希兹条件的情况下，此方法用以求解随机微分方程的收敛性，并且求出强收敛的阶是 $1/2$，同时证明了 Split-step 近似解的均方收敛理论。Wang[42]等人给出了自治标量 Split-step 欧拉算法的数值格式，并证明它的收敛性和稳定性。李启勇[48]等人研究一类改进分步向后 Euler 方法求解随机延迟积分微分方程的均方指数稳定性。证明了在约束网格下，该方法依步长 $h=\frac{T}{m}$ 保持原系统的均方指数稳定性。郝[49] 讨论了求解随机延迟微分方程的分步向前 Euler 方法在均方意义下的收敛性和稳定性。将分步向前 Euler 方法应用于具有一般形式的随机延迟微分方程，得到差分格式，证明该格式在均方意义下的收敛阶为 $1/2$，给出保证差分格式均方稳定的步长限制条件。裘赟辰[31]讨论了带跳的随机延迟微分方程的 Split-step 算法，证明了该算法的收敛性，同时也给出了算法均方稳定的条件。
- **Split-step θ 算法(简称 $SS\theta$ 算法)** Cao[45] 等人研究了随机延迟微分方程 Split-step θ 算法的均方稳定性和收敛性，同时证明了在一定条件下 Split-step θ 算法的指数均方稳定并以阶数 0.5 收敛。Rathinasamy[46] 研究了线性随机延迟积分微分方程的 Split-step θ 算法的稳定性，其中维纳过程是一个两点分布的离散型随机变量。唐占涛[47]等人研究了随机分步 θ（SST）方法应用于随机延迟微分方程（SDDEs）时的稳定性性质，给出在线性增长条件及单边 Lipschitz 条件下，SST 数值解能保持原方程真实解几乎必然指数稳定的一个充分条件。

本文将在带流的完备概率空间 $\left(\Omega,\mathscr{F},\{\mathscr{F}_t\}_{t\in[0,T]},P\right)$ 上，讨论 Itô 型随机微分方程

$$\begin{cases}dX(t)=f(t,X(t))dt+g(t,X(t))dW_t+h(t,X(t^-))dN_t, & t\in[0,T]\\ X(t)=X_0, & \end{cases}\tag{1-1}$$

或者

$$\begin{cases}dX(t)=f\left(t,X(t),X(t-\tau)\right)dt+g\left(t,X(t),X(t-\tau)\right)dW_t & \\ \qquad +h\left(t,X(t^-),X\left((t-\tau)^-\right)\right)dN_t & t\in[0,T]\\ X(t)=\varphi(t), & t\in[-\tau,0]\end{cases}\tag{1-2}$$

其中流 $\mathscr{F}_t$ 是递增的，右连续且 $\mathscr{F}_0$ 包含所有的零测集。$X(t)$ 是定义在 $[-\tau,T]$ 上的右连左极的函数族，其范数 $\|\varphi\|=\sup_{-\tau\le t\le 0}|\varphi(t)|$，$W_t$ 是 $\mathscr{F}_t$ 适应的布朗运动，N_t 是定义在概率空间上的参数为 λ 的一维泊松过程，W_t，N_t 与 $\mathscr{F}_0$ 相互独立。

本文首先在裘赟辰[31]已给出 Split-step 算法的基础上，讨论方程(1-2)的 Split-step 算法近似解的收敛速率。与裘赟辰[31]所作的局部误差不同，本文将讨论方程(1-2)近似解的

全局误差。在文献[45]所研究的方程基础上引入了泊松跳过程，并构造了 Split-step θ 方法，本文将研究 Split-step θ 算法的收敛速率，随后将结果推广到方程(1-2)。最后依据文献[6,35]给出得随机 Taylor 展开式和文献[25]给出的离散的随机 Taylor 展开式，对方程(1-1)构造强 Taylor Split-step 法。

本文将如下安排：第二章讨论一类带跳的 Itô 型随机微分方程的 Split-step 算法及其收敛速率。第三章给出带跳的随机微分方程的 Split-step θ 算法，并证明算法是收敛的。第四章研究带时滞的随机微分方程的 Split-step θ 算法。第五章用 Taylor 展开式建立一阶的 Split-step 算法。

第 2 章 带跳的变时滞随机微分方程裂步法近似解的收敛速率

本章节考虑如下形式的具有时变时滞的带跳随机延迟微分方程

$$\begin{cases} \mathrm{d}X(t)=f\big(t,X(t),X\big(t-\tau(t)\big)\big)dt+g\big(t,X(t),X\big(t-\tau(t)\big)\big)dW_t \\ \qquad +h\Big(t,X(t^-),X\big((t-\tau(t))^-\big)\Big)dN_t, \quad t\in[0,T] \\ X(t)=\varphi(t), \quad t\in[-r,0] \end{cases} \tag{2-1}$$

其中$\varphi(t)\in C([-r,0];R)$，$\sup_{-r\le t\le 0}E|\varphi(t)|^2<\infty$，且对于所有的$t\ge 0$，$\varphi(t)$与$W_t$和$N_t$相互独立，$X(t)$为属于$C([-r,T];R)$的随机变量；$W_t$为$\mathscr{F}_t$适应的标准维纳过程，$N_t$为参数为$\lambda t$的一维泊松过程，$W_t$与$N_t$相互独立。$X(t^-)=\lim_{s\uparrow t}X(s)$。方程(2-1)的时滞项$\tau(t)$为时变时滞，假设时滞$\tau(t)$满足下列两个条件：

(1) $\tau(t)$：$[0,\infty)\to R_+$，存在某个正实数r，使得$t-\tau(t)\ge -r$。

(2) 对任意的t、$s\ge 0$，存在一非负实数ρ，使得$|\tau(t)-\tau(s)|\le\rho|t-s|$。

为了保证方程(2-1)存在唯一解及后续证明需要，我们引入如下假设：

假设 2.1 初值函数φ关于指数γ连续，即对于任意的s，$t\in[-r,0]$，存在正常数K，使得

$$E|\varphi(t)-\varphi(s)|^2\le K|t-s|^{2\gamma}. \tag{2-2}$$

假设 2.2 方程系数f，g，h关于变元t满足指数α连续，关于变元x，y满足 Lipschitz 条件，即对任意的$t_1,t_2\ge 0$以及x_1，x_2，y_1，$y_2\in R$，存在正常数$\alpha>0$、非负实数K_1，使得

$$|f(t_1,x_1,y_1)-f(t_2,x_2,y_2)|\vee|g(t_1,x_1,y_1)-g(t_2,x_2,y_2)|\vee|h(t_1,x_1,y_1)-h(t_2,x_2,y_2)| \\ \le K_1(|t_1-t_2|^{\alpha}+|x_1-x_2|+|y_1-y_2|).$$

假设 2.3 方程系数f，g，h均满足线性增长条件，即对任意的$t\ge 0$以及x，$y\in R$，存在非负常数K_2，使得

$$|f(t,x,y)|^2\vee|g(t,x,y)|^2\vee|h(t,x,y)|^2\le K_2(1+|x|^2+|y|^2).$$

由文献[30]可知，当假设 2.2 和假设 2.3 成立时，方程(2-1)存在唯一解。

现在给出方程(2-1)的 Split-step 算法。首先，我们定义一簇在$[0,T]$上的标准网格点$\Im_N \triangleq \{0=t_0<t_1<\cdots<t_k<\cdots<t_N=T\}$，其中$t_k=k\Delta$，$k\in(0,1,2,\ldots,N)$，$\Delta=\frac{T}{N}$。由于与时滞相关的点$t_k-\tau(t_k)$不一定会落在标准网格点上，所以我们针对所有的$s_k=t_k-\tau(t_k)$定义一簇非标准网格点$\wp_N \triangleq \{-r\le s_0<s_1<\cdots<s_m<\cdots<s_N\le T\}$。

将上述两个网格点合并，得$\aleph_{\tilde{N}} \triangleq \{-r\le s_0<s_1<\cdots<t_0<\cdots<s_N<\cdots<t_N=T\}$，显然，对任意的$s_l\in\aleph_{\tilde{N}}$，当$s_l>0$时，必存在$t_k\in\Im_N$和$\varsigma\in(0,1]$，使得$s_l=t_k+\varsigma\Delta$成立。

用$\bar{Y}(s_l)$表示$X(s_l)$的估计值，对于任意的$s_l\in\aleph_{\tilde{N}}$，当$s_l\le 0$时，$\bar{Y}(s_l)=\varphi(s_l)$；而当$s_l>0$时，用于计算方程(2-1)数值解的 Split-step 算法可表示为

$$\bar{Y}^*_{s_l}=\bar{Y}(t_k)+\varsigma\Delta f(t_k,\bar{Y}^*_{s_l},\bar{Y}(t_k-\tau(t_k))), \tag{2-3}$$

$$\begin{aligned}\bar{Y}(t_k+\varsigma\Delta)=\bar{Y}^*_{s_l}&+g(t_k,\bar{Y}^*_{s_l},\bar{Y}(t_k-\tau(t_k)))[W(t_k+\varsigma\Delta)-W(t_k)]\\&+h(t_k,\bar{Y}^*_{s_l},\bar{Y}(t_k-\tau(t_k)))[N(t_k+\varsigma\Delta)-N(t_k)].\end{aligned} \tag{2-4}$$

特别地，当$s_l=t_k+\varsigma\Delta$落在标准网格点$\Im_N$中，即$\varsigma=1$，$s_l=t_{k+1}$时，$Y(t_{k+1})$的计算式为

$$\bar{Y}^*_k=\bar{Y}(t_k)+\Delta f(t_k,\bar{Y}^*_k,\bar{Y}(t_k-\tau(t_k))), \tag{2-5}$$

$$\bar{Y}(t_{k+1})=\bar{Y}^*_k+g(t_k,\bar{Y}^*_k,\bar{Y}(t_k-\tau(t_k)))\Delta W_k+h(t_k,\bar{Y}^*_k,\bar{Y}(t_k-\tau(t_k)))\Delta N_k. \tag{2-6}$$

2.1 全局误差的收敛速率

本节将证明 Split-step 算法的收敛性，即算法(2-3)和(2-4)的数值解一致收敛到方程(2-1)的精确解。下面先给出 Split-step 算法的全局误差和均方意义下收敛的定义。

定义 2.1 对所有的$s_l\in\aleph_{\tilde{N}}$，必存在$t_k\in\Im_N$和$\varsigma\in(0,1]$，使得$s_l=t_k+\varsigma\Delta$，算法(2-3)和(2-4)的全局误差$\varepsilon(s_l)$定义为$\varepsilon(s_l)=X(t_k+\varsigma\Delta)-\bar{Y}(t_k+\varsigma\Delta)$。

定义 2.2 设$X(t)$为方程(2-1)的精确解，$Y(t)$为通过数值方法得到的近似估计值，若存在正常数C和γ，使得$E\left(\sup_{t\in[0,T]}\left|X(t)-Y(t)\right|^2\middle|\mathscr{F}_0\right)\le C\cdot\Delta^{2\gamma}$成立，则称在均方意义下近似解$Y(t)$的收敛，其收敛速率为$\gamma$。

现在给出本章的主要结论。

定理 2.1 若方程(2-1)满足假设 2.1-2.3，当$\Delta \le \min\left\{1, \frac{1}{\sqrt{4K_2}}, \frac{1}{2K_1}\right\}$时，则存在与步长$\Delta$无关的常数$C$时，使得不等式$\sqrt{E\left(\sup_{-r\le t\le T}|\varepsilon(t)|^2 \,|\mathscr{F}_0\right)} \le C\Delta^{\alpha\wedge\gamma\wedge\frac{1}{2}}$成立，即通过算法(2-3)和(2-4)得到的数值解以速率$\alpha\wedge\gamma\wedge\frac{1}{2}$一致收敛到方程(2-1)的精确解。

为了证明上述收敛定理，我们需要引入下面的几个引理。

引理 2.1 如果假设 2.3 成立，则对任意的$t\in[-r,T]$，其中$0<T<\infty$，存在正数C_1，使得$E(\sup_{-r\le t\le T}|X(t)|^2 \,|\mathscr{F}_0) \le C_1(1+E\|\varphi\|^2)$，

其中$X(t)$为方程(2-1)的解。

证明：由方程(2-1)可知，对于所有的$0<t<T$，有

$$X(t)=X(0)+\int_0^t f(u,X(u),X(u-\tau(u)))du+\int_0^t g(u,X(u),X(u-\tau(u)))dW_u$$
$$+\int_0^t h(u,X(u),X(u-\tau(u)))dN_u.$$

两边先在$[0,s_1]$上取上确界再取期望，由基本不等式$(a+b+c+d)^2\le 4a^2+4b^2+4c^2+4d^2$可知，对于所有的$s_1\in(0,\mathrm{T}]$，有

$$E(\sup_{0\le t\le s_1}|X(t)|^2\Big|\mathscr{F}_0)\le 4\{E|X(0)|^2+E(\sup_{0\le t\le s_1}\Big|\int_0^t f(u,X(u),X(u-\tau(u)))du\Big|^2\Big|\mathscr{F}_0)$$
$$+E(\sup_{0\le t\le s_1}\Big|\int_0^t g(u,X(u),X(u-\tau(u)))dW_u\Big|^2\Big|\mathscr{F}_0)$$
$$+E(\sup_{0\le t\le s_1}\Big|\int_0^t h(u,X(u),X(u-\tau(u)))dN_u\Big|^2\Big|\mathscr{F}_0)\}. \tag{2-7}$$

由柯西施瓦兹不等式，Fubini 定理和假设 2.3 可得，

$$E(\sup_{0\le t\le s_1}\Big|\int_0^t f(u,X(u),X(u-\tau(u)))du\Big|^2\Big|\mathscr{F}_0)$$
$$\le s_1E\left[(\int_0^{s_1}|f(u,X(u),X(u-\tau(u)))|^2du)|\mathscr{F}_0\right]$$
$$\le K_2s_1\int_0^{s_1}E[(\sup_{0\le\theta\le u}(1+|X(\theta)|^2+|X(\theta-\tau(\theta))|^2)|\mathscr{F}_0]du$$
$$\le K_2{s_1}^2+K_2s_1\int_0^{s_1}E\left[(\sup_{0\le\theta\le u}(|X(\theta)|^2+|X(\theta-\tau(\theta))|^2)\Big|\mathscr{F}_0\right]du$$

$$\le K_2 s_1^2 + 2K_2 s_1 \int_0^{s_1} E(\sup_{-r\le\theta\le u} |X(\theta)|^2 \Big| \mathscr{F}_0) du. \tag{2-8}$$

由 Doob 鞅不等式，用上面同样的方法可知，

$$E(\sup_{0\le t\le s_1} \left| \int_0^t g(u, X(u), X(u-\tau(u))) dW_u \right|^2 \Big| \mathscr{F}_0)$$

$$\le 4\int_0^{s_1} E(|g(u, X(u), X(u-\tau(u)))|^2 \Big| \mathscr{F}_0) du$$

$$\le 4K_2[s_1 + 2\int_0^{s_1} E(\sup_{-r\le\theta\le u} |X(\theta)|^2 \Big| \mathscr{F}_0) du]$$

$$= 4K_2 s_1 + 8K_2 \int_0^{s_1} E(\sup_{-r\le\theta\le u} |X(\theta)|^2 \Big| \mathscr{F}_0) du) \tag{2-9}$$

对于泊松跳，记 $\tilde{N}_u = N_u - \lambda u$，由 $B-D-G$ 不等式可得

$$E(\sup_{0\le t\le s_1} \left| \int_0^t h(u, X(u), X(u-\tau(u))) dN_u \right|^2 \Big| \mathscr{F}_0)$$

$$= E(\sup_{0\le t\le s_1} \left| \int_0^t h(u, X(u), X(u-\tau(u))) d\tilde{N}_u + \lambda \int_0^t h(u, X(u), X(u-\tau(u))) du \right|^2 \Big| \mathscr{F}_0)$$

$$\le 2E(\sup_{0\le t\le s_1} \left| \int_0^t h(u, X(u), X(u-\tau(u))) d\tilde{N}_u \right|^2 \Big| \mathscr{F}_0)$$

$$+ 2\lambda^2 E(\sup_{0\le t\le s_1} \left| \int_0^t h(u, X(u), X(u-\tau(u))) du \right|^2 \Big| \mathscr{F}_0)$$

$$\le 8\lambda E\left[(\int_0^{s_1} |h(u, X(u), X(u-\tau(u)))|^2 du) \Big| \mathscr{F}_0 \right] + 2\lambda^2 s_1 E\left[(\int_0^{s_1} |h(u, X(u), X(u-\tau(u)))|^2 du) \Big| \mathscr{F}_0 \right]$$

$$\le 2\lambda K_2(4 + \lambda s_1)[s_1 + 2\int_0^{s_1} E(\sup_{-r\le\theta\le u} |X(\theta)|^2 \Big| \mathscr{F}_0) du]. \tag{2-10}$$

将式(2-8)- (2-10)代入式(2-7)，有

$$E(\sup_{0\le t\le s_1} |X(t)|^2 \Big| \mathscr{F}_0) \le 4\{E(\sup_{-r\le\theta\le 0} |\varphi(\theta)|^2) + K_2 s_1 O_1 + 2K_2 O_1 \int_0^{s_1} E(\sup_{-r\le\theta\le u} |X(\theta)|^2 \Big| \mathscr{F}_0) du\} \tag{2-11}$$

其中 $O_1 = T + 4 + 2\lambda(4 + \lambda T)$。

注意到

$$\sup_{-r\le t\le s_1} |X(t)|^2 \le \sup_{-r\le t\le 0} |\varphi(t)|^2 \vee \sup_{0\le t\le s_1} |X(t)|^2.$$

故由式(2-11)可得

$$E(\sup_{-r\le t\le s_1}|X(t)|^2\Big|\mathscr{F}_0)\le 4\{E(\sup_{-r\le\theta\le 0}|\varphi(\theta)|^2)+K_2s_1O_1+2K_2O_1\int_0^{s_1}E(\sup_{-r\le\theta\le u}|X(\theta)|^2\Big|\mathscr{F}_0)du\}.$$

由 Gronwall 不等式，可得

$$E(\sup_{-r\le t\le T}|X(t)|^2\Big|\mathscr{F}_0)\le 4[E(\sup_{-r\le\theta\le 0}|\varphi(\theta)|^2)+K_2s_1O_1](1+e^{(8K_2O_1)T})$$

$$\le 4(K_2TO_1\vee 1)(1+e^{(8K_2O_1)T})(1+E\|\varphi(t)\|). \tag{2-12}$$

引理 2.2 如果假设 2.3 成立，则对任意的$0\le s<t\le T$，其中$0<T<\infty$，且$t-s<1$，存在正数C_2，使得方程(2-1)的解满足$E\left(|X(t)-X(s)|^2\Big|\mathscr{F}_0\right)\le C_2(t-s)$。

证明：由方程(2-1)和基本不等式$(a+b+c)^2\le 3a^2+3b^2+3c^2$，可知

$$E\left(|X(t)-X(s)|^2\Big|\mathscr{F}_0\right)\le 3E\left(\left|\int_s^t f(u,X(u),X(u-\tau(u)))du\right|^2\Big|\mathscr{F}_0\right)$$

$$+3E\left(\left|\int_s^t g(u,X(u),X(u-\tau(u)))dW_u\right|^2\Big|\mathscr{F}_0\right)$$

$$+3E\left(\left|\int_s^t h(u,X(u),X(u-\tau(u)))dN_u\right|^2\Big|\mathscr{F}_0\right).$$

用与引理 2.1 类似的证明方法可得

$$E\left(|X(t)-X(s)|^2\Big|\mathscr{F}_0\right)\le 3K_2(t-s)(1+2\lambda^2)E\left[\left(\int_s^t\left(1+|X(u)|^2+|X(u-\tau(u))|^2\right)du\right)\Big|\mathscr{F}_0\right]$$

$$+3K_2(1+2\lambda)E\left[\left(\int_s^t\left(1+|X(u)|^2+|X(u-\tau(u))|^2\right)du\right)\Big|\mathscr{F}_0\right].$$

由引理 2.1 以及$t-s<1$可知

$$E\left(|X(t)-X(s)|^2\Big|\mathscr{F}_0\right)\le 6K_2(1+\lambda+\lambda^2)\left[1+2E\left(\sup_{-r\le t\le T}|X(t)|^2\Big|\mathscr{F}_0\right)\right](t-s)$$

$$\le C_2(t-s),$$

其中$C_2=6K_2(1+\lambda+\lambda^2)(1+2[C_1(1+E\|\varphi\|^2)])$.

为了证明定理 2.1。我们将$X(t_k)$，$X(t_k-\tau(t_k))$分别代入算法(2-3) 和(2-4)的右边的$\overline{Y}_k$，$\overline{Y}(t_k-\tau(t_k))$，得到下列表达式：

$$\mathrm{Y}_{s_i}^*=X(t_k)+\varsigma\Delta f(t_k,\mathrm{Y}_{s_i}^*,X(t_k-\tau(t_k))), \tag{2-13}$$

$$\mathrm{Y}(t_k+\varsigma h)=\mathrm{Y}_{s_i}^*+g(t_k,\mathrm{Y}_{s_i}^*,X(t_k-\tau(t_k)))[W(t_k+\varsigma\Delta)-W(t_k)]$$

$$+h(t_k,Y_{s_l}^*,X(t_k-\tau(t_k)))[N(t_k+\varsigma\Delta)-N(t_k)]. \tag{2-14}$$

对(2-13)式中的$Y_{s_l}^*$作估计。

引理 2.3 如果假设 2.3 成立，则对任意的$t\in[0,T]$，其中$0<T<\infty$，当$\Delta\le\min\left\{1,\frac{1}{\sqrt{4K_2}}\right\}$，存在正常数$C_3$，$C_4$，使得算法(2-13)中的近似解$Y_{s_l}^*$满足

$$E\left(\left|Y_{s_l}^*\right|^2\middle|\mathscr{F}_0\right)\le C_3E\|\varphi\|^2+C_4. \tag{2-15}$$

证明：对算法(2-13)式两边平方后取期望，由基本不等式$(a+b)^2\le 2a^2+2b^2$可知

$$E\left(\left|Y_{s_l}^*\right|^2\middle|\mathscr{F}_0\right)\le 2E\left(\left|X(t_k)\right|^2\middle|\mathscr{F}_0\right)+2E\varsigma^2\Delta^2\left(f^2\left(t_k,Y_{s_l}^*,X\left(t_k-\tau\left(t_k\right)\right)\right)\middle|\mathscr{F}_0\right).$$

由线性增长条件可知

$$E\left(\left|Y_{s_l}^*\right|^2\middle|\mathscr{F}_0\right)\le 2E\left(\left|X(t_k)\right|^2\middle|\mathscr{F}_0\right)+2\varsigma^2\Delta^2K_2\left(1+E\left(\left|Y_{s_l}^*\right|^2\middle|\mathscr{F}_0\right)+E\left(\left|X(t_k-\tau(t_k))\right|^2\middle|\mathscr{F}_0\right)\right).$$

移项整理后，由引理 2.1 可得

$$\begin{aligned}
E\left(\left|Y_{s_l}^*\right|^2\middle|\mathscr{F}_0\right)&\le\frac{2}{1-2\varsigma^2\Delta^2K_2}E\left(\left|X(t_k)\right|^2\middle|\mathscr{F}_0\right)\\
&\quad+\frac{2\varsigma^2\Delta^2K_2}{1-2\varsigma^2\Delta^2K_2}E\left(\left|X(t_k-\tau(t_k))\right|^2\middle|\mathscr{F}_0\right)+\frac{2\varsigma^2\Delta^2K_2}{1-2\varsigma^2\Delta^2K_2}\\
&\le\frac{2(1+\varsigma^2\Delta^2K_2)}{1-2\varsigma^2\Delta^2K_2}(1+E\|\varphi\|^2)+\frac{2\varsigma^2\Delta^2K_2}{1-2\varsigma^2\Delta^2K_2}\\
&\le C_3E\|\varphi\|^2+C_4
\end{aligned}$$

其中$C_3=4\left(1+K_2\right),C_4=C_3+4K_2$.

引理 2.4 设$X\left(t\right)$是方程(2-1)的解，$\bar{Y}(t)$是 Split-step 算法得到的近似解，若假设 2.1-2.3 成立，则对任意的$0\le k\le N-1$，存在正常数C_5，使得当$\Delta\le\min\left\{1,\frac{1}{\sqrt{4K_2}},\frac{1}{2K_1}\right\}$时，

$$E\left(\left|\varepsilon(t_k+\varsigma\Delta)\right|^2\middle|\mathscr{F}_0\right)\le C_5\Delta^{2\alpha\wedge2\gamma\wedge1}.$$

证明：利用方程(2-1)和式(2-4)，得到误差

$$
\begin{aligned}
\varepsilon(t_k+\varsigma\Delta) &= X(t_k+\varsigma\Delta)-\overline{Y}(t_k+\varsigma\Delta)\\
&=\varepsilon(t_k)+\int_{t_k}^{t_k+\varsigma\Delta}[f(r,X(r),X(r-\tau(r)))-f(t_k,\overline{Y}^*_{s_l},\overline{Y}(t_k-\tau(t_k)))]dr\\
&\quad+\int_{t_k}^{t_k+\varsigma\Delta}[g(r,X(r),X(r-\tau(r)))-g(t_k,\overline{Y}^*_{s_l},\overline{Y}(t_k-\tau(t_k)))]dW_r\\
&\quad+\int_{t_k}^{t_k+\varsigma\Delta}[h(r,X(r),X(r-\tau(r)))-h(t_k,\overline{Y}^*_{s_l},\overline{Y}(t_k-\tau(t_k)))]dN_r. \qquad (2\text{-}16)
\end{aligned}
$$

对式$\varepsilon^2(t_k+\varsigma\Delta)$运用Itô公式得

$$
\begin{aligned}
\varepsilon^2(t_k+\varsigma\Delta)&=\varepsilon^2(t_k)+\int_{t_k}^{t_k+\varsigma\Delta}\left|g(r,X(r),X(r-\tau(r)))-g(t_k,\overline{Y}^*_{s_l},\overline{Y}(t_k-\tau(t_k)))\right|^2dr\\
&\quad+\int_{t_k}^{t_k+\varsigma\Delta}\left|h(r,X(r),X(r-\tau(r)))-h(t_k,\overline{Y}^*_{s_l},\overline{Y}(t_k-\tau(t_k)))\right|^2dN_r\\
&\quad+2\int_{t_k}^{t_k+\varsigma\Delta}[f(r,X(r),X(r-\tau(r)))-f(t_k,\overline{Y}^*_{s_l},\overline{Y}(t_k-\tau(t_k)))]\varepsilon(r)dr\\
&\quad+2\int_{t_k}^{t_k+\varsigma\Delta}[g(r,X(r),X(r-\tau(r)))-g(t_k,\overline{Y}^*_{s_l},\overline{Y}(t_k-\tau(t_k)))]\varepsilon(r)dW_r\\
&\quad+2\int_{t_k}^{t_k+\varsigma\Delta}[h(r,X(r),X(r-\tau(r)))-h(t_k,\overline{Y}^*_{s_l},\overline{Y}(t_k-\tau(t_k)))]\varepsilon(r)dN_r \qquad (2\text{-}17)
\end{aligned}
$$

再由$E\left(\int f(t)dW_t\middle|\mathscr{F}_0\right)=0$，$E\left(\int f(t)dN_t\middle|\mathscr{F}_0\right)=\lambda E\left(\int f(t)dt\middle|\mathscr{F}_0\right)$，对式(2-17)两边取条件期望得

$$
\begin{aligned}
E\left(\varepsilon^2(t_k+\varsigma\Delta)\middle|\mathscr{F}_0\right)&=E\left(\varepsilon^2(t_k)\middle|\mathscr{F}_0\right)\\
&\quad+E\left[\int_{t_k}^{t_k+\varsigma\Delta}\left|g(r,X(r),X(r-\tau(r)))-g(t_k,\overline{Y}^*_{s_l},\overline{Y}(t_k-\tau(t_k)))\right|^2dr\middle|\mathscr{F}_0\right]\\
&\quad+\lambda E\left[\int_{t_k}^{t_k+\varsigma\Delta}\left|h(r,X(r),X(r-\tau(r)))-h(t_k,\overline{Y}^*_{s_l},\overline{Y}(t_k-\tau(t_k)))\right|^2dr\middle|\mathscr{F}_0\right]\\
&\quad+2E\left[\int_{t_k}^{t_k+\varsigma\Delta}\left([f(r,X(r),X(r-\tau(r)))-f(t_k,\overline{Y}^*_{s_l},\overline{Y}(t_k-\tau(t_k)))]\varepsilon(r)\right)dr\middle|\mathscr{F}_0\right]\\
&\quad+2\lambda E\left[\int_{t_k}^{t_k+\varsigma\Delta}\left([h(r,X(r),X(r-\tau(r)))-h(t_k,\overline{Y}^*_{s_l},\overline{Y}(t_k-\tau(t_k)))]\varepsilon(r)\right)dr\middle|\mathscr{F}_0\right].
\end{aligned}
$$

(2-18)

现在估计(2-18)式的右边第二项，由 Lipschitz 条件和基本不等式可得

$$
\begin{aligned}
&E\left(\int_{t_k}^{t_k+\Delta}\left|g(r,X(r),X(r-\tau(r)))-g(t_k,\overline{Y}^*_{s_l},\overline{Y}(t_k-\tau(t_k)))\right|^2dr\middle|\mathscr{F}_0\right)\\
&\le 2E\left(\int_{t_k}^{t_k+\Delta}\left|g(r,X(r),X(r-\tau(r)))-g(t_k,Y^*_{s_l},X(t_k-\tau(t_k)))\right|^2dr\middle|\mathscr{F}_0\right)\\
&\quad+2E\left(\int_{t_k}^{t_k+\Delta}\left|g(t_k,Y^*_{s_l},X(t_k-\tau(t_k)))-g(t_k,\overline{Y}^*_{s_l},\overline{Y}(t_k-\tau(t_k)))\right|^2dr\middle|\mathscr{F}_0\right)\\
&\le 2K_1^2E\left(\int_{t_k}^{t_k+\Delta}\left\|r-t_k\right|^{\alpha}+\left|X(r)-Y^*_{s_l}\right|+\left|X(r-\tau(r))-X(t_k-\tau(t_k))\right\|^2dr\middle|\mathscr{F}_0\right)
\end{aligned}
$$

$$+2K_1^2E\left(\int_{t_k}^{t_k+\Delta}\left\|Y_{s_l}^*-\overline{Y}_{s_l}^*\right|+\left|X(t_k-\tau(t_k))-\overline{Y}(t_k-\tau(t_k))\right\|^2dr\Big|\mathscr{F}_0\right)$$

$$\le 6K_1^2\int_{t_k}^{t_k+\Delta}[E\left(\left|r-t_k\right|^{2\alpha}\right)+E\left(\left|X(r)-Y_{s_l}^*\right|^2\Big|\mathscr{F}_0\right)]dr$$

$$+6K_1^2\int_{t_k}^{t_k+\Delta}E\left(\left|X(r-\tau(r))-X(t_k-\tau(t_k))\right|^2\Big|\mathscr{F}_0\right)dr$$

$$+4K_1^2\int_{t_k}^{t_k+\Delta}[E\left(\left|Y_{s_l}^*-\overline{Y}_{s_l}^*\right|^2\Big|\mathscr{F}_0\right)+E\left(\left|X(t_k-\tau(t_k))-\overline{Y}(t_k-\tau(t_k))\right|^2\Big|\mathscr{F}_0\right)]dr \tag{2-19}$$

首先估计 $\int_{t_k}^{t_k+\Delta}E\left(\left|X(r)-Y_{s_l}^*\right|^2\Big|\mathscr{F}_0\right)dr$，由基本不等式$(a+b)^2\le 2a^2+2b^2$、引理 2.2 和式(2-13)可知

$$\int_{t_k}^{t_k+\Delta}E\left(\left|X(r)-Y_{s_l}^*\right|^2\Big|\mathscr{F}_0\right)dr=\int_{t_k}^{t_k+\Delta}E\left(\left|X(r)-X(t_k)+X(t_k)-Y_{s_l}^*\right|^2\Big|\mathscr{F}_0\right)dr$$

$$\le 2\int_{t_k}^{t_k+\Delta}E\left(\left|X(r)-X(t_k)\right|^2\Big|\mathscr{F}_0\right)dr+2\int_{t_k}^{t_k+\Delta}E\left(\left|X(t_k)-Y_{s_l}^*\right|^2\Big|\mathscr{F}_0\right)dr$$

$$\le 2C_2\int_{t_k}^{t_k+\Delta}\left|r-t_k\right|dr+2\int_{t_k}^{t_k+\Delta}E\left(\left|\varsigma\Delta f(t_k,Y_{s_l}^*,X(t_k-\tau(t_k)))\right|^2\Big|\mathscr{F}_0\right)dr.$$

利用假设 2.3、引理 2.1 和引理 2.3 可知

$$\int_{t_k}^{t_k+\Delta}E\left(\left|X(r)-Y_{s_l}^*\right|^2\Big|\mathscr{F}_0\right)dr$$

$$\le C_2\Delta^2+2K_2\Delta^3\left\{1+E\left(\left|Y_{s_l}^*\right|^2\Big|\mathscr{F}_0\right)+E\left(\left|X(t_k-\tau(t_k))\right|^2\Big|\mathscr{F}_0\right)\right\}$$

$$\le C_2\Delta^2+2K_2\Delta^3[C_3\mathrm{E}\|\varphi\|^2+C_4+C_1(1+\mathrm{E}\|\varphi\|^2)+1]$$

$$\le C_2\Delta^2+\tilde{C}_1\Delta^3 \tag{2-20}$$

其中 $\tilde{C}_1=2K_2[(C_1+C_3)\mathrm{E}\|\varphi\|^2+(C_1+C_4+1)]$.

接着估计 $E\left(\left|Y_{s_l}^*-\overline{Y}_{s_l}^*\right|^2\Big|\mathscr{F}_0\right)$，由算法(2-3)、(2-4)、(2-13)、(2-14)和基本不等式可知

$$E\left(\left|Y_{s_l}^*-\overline{Y}_{s_l}^*\right|^2\Big|\mathscr{F}_0\right)=E\left(\left\{[X(t_k)+\varsigma\Delta f(t_k,Y_{s_l}^*,X(t_k-\tau(t_k)))]\right.\right.$$

$$\left.\left.-[\overline{Y}(t_k)+\varsigma\Delta f(t_k,\overline{Y}_{s_l}^*,\overline{Y}(t_k-\tau(t_k)))]\right\}^2\Big|\mathscr{F}_0\right)$$

$$\le E\left(\left\{\varepsilon(t_k)+K_1\varsigma\Delta\left|Y_{s_l}^*-\overline{Y}_{s_l}^*\right|+K_1\varsigma\Delta\left|\varepsilon(t_k-\tau(t_k))\right|\right\}^2\Big|\mathscr{F}_0\right)。$$

$$\le 3E\left(\left|\varepsilon(t_k)\right|^2\Big|\mathscr{F}_0\right)+3K_1^2\Delta^2E\left(\left|Y_{s_l}^*-\overline{Y}_{s_l}^*\right|^2\Big|\mathscr{F}_0\right)$$

$$+3K_1^2\Delta^2E\left(\left|\varepsilon(t_k-\tau(t_k))\right|^2\Big|\mathscr{F}_0\right)$$

移项整理得

$$E\left(\left|\mathrm{Y}_{s_l}^{*}-\bar{\mathrm{Y}}_{s_l}^{*}\right|^{2}\middle|\mathscr{F}_{0}\right)\leq\frac{3}{1-3K_{1}^{2}\Delta^{2}}E\left(\left|\varepsilon(t_{k})\right|^{2}\middle|\mathscr{F}_{0}\right)+\frac{3K_{1}^{2}\Delta^{2}}{1-3K_{1}^{2}\Delta^{2}}E\left(\left|\varepsilon(t_{k}-\tau(t_{k}))\right|^{2}\middle|\mathscr{F}_{0}\right)\tag{2-21}$$

接下来需要估计 $\int_{t_k}^{t_k+\Delta}E\left(\left|X(r-\tau(r))-X(t_k-\tau(t_k))\right|^2\middle|\mathscr{F}_0\right)dr$，分以下三种情况进行讨论：

(1) 若$r-\tau(r)\leq t_k-\tau(t_k)\leq 0$或$t_k-\tau(t_k)\leq r-\tau(r)\leq 0$，则由假设 2.1 可知

$$\begin{aligned}E\left(\left|X(r-\tau(r))-X(t_k-\tau(t_k))\right|^2\middle|\mathscr{F}_0\right)&\leq K\left(\left|(r-\tau(r))-(t_k-\tau(t_k))\right|^{2\gamma}\right)\\&\leq K\left([\left|r-t_k\right|+\left|\tau(r)-\tau(t_k)\right|]^{2\gamma}\right)\\&\leq K\{\left|r-t_k\right|+\rho\left|r-t_k\right|\}^{2\gamma}\end{aligned}$$

即

$$E\left(\left|X(r-\tau(r))-X(t_k-\tau(t_k))\right|^2\middle|\mathscr{F}_0\right)\leq K(1+\rho)^{2\gamma}\Delta^{2\gamma}.\tag{2-22}$$

(2)若$0\leq r-\tau(r)\leq t_k-\tau(t_k)$或$0\leq t_k-\tau(t_k)\leq r-\tau(r)$，则由引理 2.2 可知

$$E\left(\left|X(r-\tau(r))-X(t_k-\tau(t_k))\right|^2\middle|\mathscr{F}_0\right)\leq C_2\left(\left|(r-\tau(r))-(t_k-\tau(t_k))\right|\right)$$

即用上面同样的方法可得

$$E\left|X(r-\tau(r))-X(t_k-\tau(t_k))\right|^2\leq C_2(1+\rho)\Delta.\tag{2-23}$$

(3)若$r-\tau(r)\leq 0\leq t_k-\tau(t_k)$或$t_k-\tau(t_k)\leq 0\leq r-\tau(r)$,首先考虑$r-\tau(r)\leq 0\leq t_k-\tau(t_k)$,

此时$-(r-\tau(r))\leq-(r-\tau(r))+(t_k-\tau(t_k))\leq(1+\rho)\Delta$以及

$t_k-\tau(t_k)\leq t_k-\tau(t_k)-(r-\tau(r))\leq(1+\rho)\Delta$成立，则

$$\begin{aligned}&E\left(\left|X(r-\tau(r))-X(t_k-\tau(t_k))\right|^2\middle|\mathscr{F}_0\right)\\&\leq 2E\left(\left|X(r-\tau(r))-X(0)\right|^2\middle|\mathscr{F}_0\right)+2E\left(\left|X(0)-X(t_k-\tau(t_k))\right|^2\middle|\mathscr{F}_0\right)\\&\leq 2E\left(\left|\varphi(r-\tau(r))-\varphi(0)\right|^2\middle|\mathscr{F}_0\right)+2E\left(\left|X(0)-X(t_k-\tau(t_k))\right|^2\middle|\mathscr{F}_0\right)\\&\leq 2K\left|r-\tau(r)\right|^{2\gamma}+2C_2\left|t_k-\tau(t_k)\right|\\&\leq 2K(1+\rho)^{2\gamma}\Delta^{2\gamma}+2C_2(1+\rho)\Delta.\end{aligned}\tag{2-24}$$

同理，当$t_k-\tau(t_k)\leq 0\leq r-\tau(r)$时可以得到相同的结论。

综合式(2-22)、式(2-23) 与式(2-24)，可得

$$E\int_{t_k}^{t_k+\Delta}\left(\left|X(r-\tau(r))-X(t_k-\tau(t_k))\right|^2\middle|\mathscr{F}_0\right)dr\leq\tilde{C}_2\Delta^{(2\gamma+1)\wedge 2},\tag{2-25}$$

其中$\tilde{C}_2 = 2(1+\rho)^{2\gamma}K + 2(1+\rho)C_2$。

将式(2-20)、式(2-21) 与式(2-25)代入(2-19)得到

$$E\left(\int_{t_k}^{t_k+\Delta}\left|g(r,X(r),X(r-\tau(r)))-g(t_k,\overline{Y}_{s_l}^{*},\overline{Y}(t_k-\tau(t_k)))\right|^2dr\middle|\mathscr{F}_0\right)$$
$$\le 6K_1^2\left[\frac{\Delta^{2\alpha+1}}{2\alpha+1}+C_2\Delta^2+\tilde{C}_1\Delta^3+\tilde{C}_2\Delta^{2(\gamma+1)\wedge 3}\right]$$
$$+4K_1^2\Delta\left[\frac{3}{1-3K_1^2\Delta^2}E\left(\left|\varepsilon(t_k)\right|^2\middle|\mathscr{F}_0\right)+\frac{3K_1^2\Delta^2}{1-3K_1^2\Delta^2}E\left(\left|\varepsilon(t_k-\tau(t_k))\right|^2\middle|\mathscr{F}_0\right)\right.$$
$$\left.+E\left(\left|\varepsilon(t_k-\tau(t_k))\right|^2\middle|\mathscr{F}_0\right)\right]. \tag{2-26}$$

类似地，估计(2-18)式的右边第三项，得到

$$\lambda E\left(\int_{t_k}^{t_k+\Delta}\left|h(r,X(r),X(r-\tau(r)))-h(t_k,\overline{Y}_{s_l}^{*},\overline{Y}(t_k-\tau(t_k)))\right|^2dr\middle|\mathscr{F}_0\right)$$
$$\le 6K_1^2\lambda\left[\frac{\Delta^{2\alpha+1}}{2\alpha+1}+C_2\Delta^2+\tilde{C}_1\Delta^3+\tilde{C}_2\Delta^{2(\gamma+1)\wedge 3}\right]$$
$$+4K_1^2\lambda\Delta\left[\frac{3}{1-3K_1^2\Delta^2}E\left(\left|\varepsilon(t_k)\right|^2\middle|\mathscr{F}_0\right)+\frac{1}{1-3K_1^2\Delta^2}E\left(\left|\varepsilon(t_k-\tau(t_k))\right|^2\middle|\mathscr{F}_0\right)\right]. \tag{2-27}$$

现在估计(2-18)式的右边第四项，根据 Hölder 不等式，用前面同样的方法可得

$$2E\left(\int_{t_k}^{t_k+\varphi\Delta}\left([f(r,X(r),X(r-\tau(r)))-f(t_k,\overline{Y}_{s_l}^{*},\overline{Y}(t_k-\tau(t_k)))]\varepsilon(r)\right)dr\middle|\mathscr{F}_0\right)$$
$$\le 2\left[\int_{t_k}^{t_k+\Delta}E\left(\left|f(r,X(r),X(r-\tau(r)))-f(t_k,\overline{Y}_{s_l}^{*},\overline{Y}(t_k-\tau(t_k)))\right|^2\middle|\mathscr{F}_0\right)dr\right]^{\frac{1}{2}}$$
$$\cdot\left[\int_{t_k}^{t_k+\Delta}E\left(\left|\varepsilon(r)\right|^2\middle|\mathscr{F}_0\right)dr\right]^{\frac{1}{2}}$$
$$\le 4\int_{t_k}^{t_k+\Delta}E\left(\left|f(r,X(r),X(r-\tau(r)))-f(t_k,\overline{Y}_{s_l}^{*},\overline{Y}(t_k-\tau(t_k)))\right|^2\middle|\mathscr{F}_0\right)dr$$
$$+\frac{1}{4}\int_{t_k}^{t_k+\Delta}E\left(\left|\varepsilon(r)\right|^2\middle|\mathscr{F}_0\right)dr$$
$$\le 24K_1^2\left[\frac{\Delta^{2\alpha+1}}{2\alpha+1}+C_2\Delta^2+\tilde{C}_1\Delta^3+\tilde{C}_2\Delta^{2(\gamma+1)\wedge 3}\right]$$
$$+16K_1^2\Delta\left[\frac{3}{1-3K_1^2\Delta^2}E\left(\left|\varepsilon(t_k)\right|^2\middle|\mathscr{F}_0\right)+\frac{1}{1-3K_1^2\Delta^2}E\left(\left|\varepsilon(t_k-\tau(t_k))\right|^2\middle|\mathscr{F}_0\right)\right]$$
$$+\frac{1}{4}\int_{t_k}^{t_k+\Delta}E\left(\left|\varepsilon(r)\right|^2\middle|\mathscr{F}_0\right)dr \tag{2-28}$$

类似地对(2-18)式的右边第五项作估计，可得

$$2\lambda E\left(\int_{t_k}^{t_k+\varsigma\Delta}\left([h(r,X(r),X(r-\tau(r)))-h(t_k,\overline{Y}_{s_l}^{*},\overline{Y}(t_k-\tau(t_k)))]\varepsilon(r)\right)dr\middle|\mathscr{F}_0\right)$$
$$\le 24K_1^2\lambda^2\left[\frac{\Delta^{2\alpha+1}}{2\alpha+1}+C_2\Delta^2+\tilde{C}_1\Delta^3+\tilde{C}_2\Delta^{2(\gamma+1)\wedge 3}\right]$$
$$+16K_1^2\lambda^2\Delta\left[\frac{3}{1-3K_1^2\Delta^2}E\left(\left|\varepsilon(t_k)\right|^2\middle|\mathscr{F}_0\right)+\frac{1}{1-3K_1^2\Delta^2}E\left(\left|\varepsilon(t_k-\tau(t_k))\right|^2\middle|\mathscr{F}_0\right)\right]$$
$$+\frac{1}{4}\int_{t_k}^{t_k+\Delta}E\left(\left|\varepsilon(r)\right|^2\middle|\mathscr{F}_0\right)dr \tag{2-29}$$

将式(2-26)、式(2-27)、式(2-28)和式(2-29)代入式(2-18)，可得

$$E\left(\left|\varepsilon(t_k+\varsigma\Delta)\right|^2\middle|\mathscr{F}_0\right)$$
$$\le E\left(\left|\varepsilon(t_k)\right|^2\middle|\mathscr{F}_0\right)+6(4\lambda^2+\lambda+5)K_1^2\left[\frac{\Delta^{2\alpha+1}}{2\alpha+1}+C_2\Delta^2+\tilde{C}_1\Delta^3+\tilde{C}_2\Delta^{2(\gamma+1)\wedge 3}\right]$$
$$+(4\lambda^2+\lambda+5)\cdot 4K_1^2\Delta\left[\frac{3}{1-3K_1^2\Delta^2}E\left(\left|\varepsilon(t_k)\right|^2\middle|\mathscr{F}_0\right)+\frac{1}{1-3K_1^2\Delta^2}E\left(\left|\varepsilon(t_k-\tau(t_k))\right|^2\middle|\mathscr{F}_0\right)\right]$$
$$+\frac{1}{2}\int_{t_k}^{t_k+\Delta}E\left(\left|\varepsilon(r)\right|^2\middle|\mathscr{F}_0\right)dr \tag{2-30}$$

对于$s_k=t_k-\tau(t_k)\in\aleph_{\tilde{N}}$，必存在整数$j<k$且满足$t_j\in\Im_N$和$\varsigma\in(0,1]$，使得$s_k=t_j+\varsigma\Delta$成立。于是有$E\left(\left|\varepsilon(t_k-\tau(t_k))\right|^2\middle|\mathscr{F}_0\right)=E\left(\left|\varepsilon(t_j+\varsigma\Delta)\right|^2\middle|\mathscr{F}_0\right)$.所以

$$E\left(\left|\varepsilon(t_k+\varsigma\Delta)\right|^2\middle|\mathscr{F}_0\right)$$
$$\le E\left(\left|\varepsilon(t_k)\right|^2\middle|\mathscr{F}_0\right)+(4\lambda^2+\lambda+5)\cdot 6K_1^2[\frac{\Delta^{2\alpha+1}}{2\alpha+1}+C_2\Delta^2+\tilde{C}_1\Delta^3+\tilde{C}_2\Delta^{(2\gamma+1)\wedge 2}]$$
$$+(4\lambda^2+\lambda+5)\cdot 4K_1^2\Delta[\frac{3}{1-3K_1^2\Delta^2}E\left(\left|\varepsilon(t_k)\right|^2\middle|\mathscr{F}_0\right)$$
$$+\frac{1}{1-3K_1^2\Delta^2}\left(E\left(\left|\varepsilon(t_j+\varsigma\Delta)\right|^2\middle|\mathscr{F}_0\right)\right)]+\frac{1}{2}\int_{t_k}^{t_{k+1}}E\left(\left|\varepsilon(r)\right|^2\middle|\mathscr{F}_0\right)dr$$
$$\le E\left(\left|\varepsilon(t_k)\right|^2\middle|\mathscr{F}_0\right)+(4\lambda^2+\lambda+5)\cdot 6K_1^2[\frac{\Delta^{2\alpha+1}}{2\alpha+1}+C_2\Delta^2+\tilde{C}_1\Delta^3+\tilde{C}_2\Delta^{(2\gamma+1)\wedge 2}]$$
$$+(4\lambda^2+\lambda+5)\cdot 4K_1^2\Delta[\frac{3}{1-3K_1^2\Delta^2}E\left(\left|\varepsilon(t_k)\right|^2\middle|\mathscr{F}_0\right)$$
$$+\frac{1}{1-3K_1^2\Delta^2}\left(\max_{0\le j\le k-1}E\left(\left|\varepsilon(t_j+\varsigma\Delta)\right|^2\middle|\mathscr{F}_0\right)\right)]+\frac{1}{2}\int_{t_k}^{t_{k+1}}E\left(\left|\varepsilon(r)\right|^2\middle|\mathscr{F}_0\right)dr. \tag{2-31}$$

注意到

$$\frac{1}{2}\int_{t_k}^{t_{k+1}}E\left(\left|\varepsilon(r)\right|^2\middle|\mathscr{F}_0\right)dr=\frac{1}{2}\int_{t_k}^{t_{k+1}}E\left(\left|X(r)-X(t_k+\varsigma\Delta)+X(t_k+\varsigma\Delta)-\overline{Y}(t_k+\varsigma\Delta)\right|^2\middle|\mathscr{F}_0\right)dr$$
$$\le\int_{t_k}^{t_{k+1}}E\left(\left|X(r)-X(t_k+\varsigma\Delta)\right|^2\middle|\mathscr{F}_0\right)dr+\int_{t_k}^{t_{k+1}}E\left(\left|X(t_k+\varsigma\Delta)-\overline{Y}(t_k+\varsigma\Delta)\right|^2\middle|\mathscr{F}_0\right)dr$$

$$\le \frac{1}{2}C_2\Delta^2 + E\left(\left|\varepsilon(t_k+\varsigma\Delta)\right|^2 \middle| \mathscr{F}_0\right)\Delta \tag{2-32}$$

代入(2-31)，得

$$E\left(\left|\varepsilon(t_k+\varsigma\Delta)\right|^2 \middle| \mathscr{F}_0\right)$$

$$\le \max_{0\le j\le k-1}\sup_{\varsigma\in(0,1]} E\left(\left|\varepsilon(t_j+\varsigma\Delta)\right|^2 \middle| \mathscr{F}_0\right) + (4\lambda^2+\lambda+5)\cdot 6K_1^2[\frac{\Delta^{2\alpha+1}}{2\alpha+1} + C_2\Delta^2 + \tilde{C}_1\Delta^3 + \tilde{C}_2\Delta^{(2\gamma+1)\wedge 2}]$$

$$+(4\lambda^2+\lambda+5)\cdot 4K_1^2\Delta[\frac{3}{1-3K_1^2\Delta^2}\max_{0\le j\le k-1}\sup_{\varsigma\in(0,1]} E\left(\left|\varepsilon(t_j+\varsigma\Delta)\right|^2 \middle| \mathscr{F}_0\right)$$

$$+\frac{1}{1-3K_1^2\Delta^2}\left(\max_{0\le j\le k-1}\sup_{\varsigma\in(0,1]} E\left(\left|\varepsilon(t_j+\varsigma\Delta)\right|^2 \middle| \mathscr{F}_0\right)\right)] + \frac{1}{2}C_2\Delta^2 + \Delta E\left(\left|\varepsilon(t_k+\varsigma\Delta)\right|^2 \middle| \mathscr{F}_0\right) \tag{2-33}$$

式(2-33)移项整理后，左边先去上确界再取最大值，令

$E_k = \max_{0\le i\le k-1}\sup_{\varsigma\in(0,1]} E\left(\left|\varepsilon(t_i+\varsigma\Delta)\right|^2 \middle| \mathscr{F}_0\right)$，可得

$$E_{k+1} \le \frac{1+16K_1^2\Delta(4\lambda^2+\lambda+5)-3K_1^2\Delta^2}{[1-3K_1^2\Delta^2][1-\Delta]}E_k + \frac{C_6}{1-\Delta}\Delta^{(2\alpha+1)\wedge 2\wedge(2\gamma+1)}$$

$$=[\frac{1}{1-\Delta}+\frac{16K_1^2\Delta(4\lambda^2+\lambda+5)}{[1-3K_1^2\Delta^2][1-\Delta]}]E_k + \frac{C_6}{1-\Delta}\Delta^{(2\alpha+1)\wedge 2\wedge(2\gamma+1)} \tag{2-34}$$

迭代可得

$$E_{k+1} \le [\frac{1}{1-\Delta}+\frac{16K_1^2\Delta(4\lambda^2+\lambda+5)}{[1-3K_1^2\Delta^2][1-\Delta]}]^k E_1$$

$$+\frac{C_6}{1-\Delta}\Delta^{(2\alpha+1)\wedge 2\wedge(2\gamma+1)}\sum_{i=0}^{k-1}[\frac{1}{1-\Delta}+\frac{16K_1^2\Delta(4\lambda^2+\lambda+5)}{[1-3K_1^2\Delta^2][1-\Delta]}]^i$$

$$\le \frac{C_6}{1-\Delta}\Delta^{(2\alpha+1)\wedge 2\wedge(2\gamma+1)}\sum_{i=0}^{k}[\frac{1}{1-\Delta}+\frac{16K_1^2\Delta(4\lambda^2+\lambda+5)}{[1-3K_1^2\Delta^2][1-\Delta]}]^i$$

$$\le \frac{C_6}{1-\Delta}\Delta^{(2\alpha+1)\wedge 2\wedge(2\gamma+1)}\left\{\frac{[\frac{1}{1-\Delta}+\frac{16K_1^2\Delta(4\lambda^2+\lambda+5)}{[1-3K_1^2\Delta^2][1-\Delta]}]^N-1}{\frac{\Delta}{1-\Delta}+\frac{16K_1^2\Delta(4\lambda^2+\lambda+5)}{[1-3K_1^2(\Delta)^2][1-\Delta]}}\right\}$$

$$\le C_6\Delta^{(2\alpha+1)\wedge 2\wedge(2\gamma+1)}\left\{\frac{[1+\frac{16K_1^2\Delta(4\lambda^2+\lambda+5)}{1-3K_1^2\Delta^2}]^N[\frac{1}{1-\Delta}]^N-1}{\Delta+\frac{16K_1^2\Delta(4\lambda^2+\lambda+5)}{1-3K_1^2\Delta^2}}\right\}$$

$$\le C_6\Delta^{2\alpha\wedge1\wedge2\gamma}\left\{\frac{[1+\frac{16K_1^2\Delta(4\lambda^2+\lambda+5)}{1-3K_1^2\Delta^2}]^N[\frac{1}{1-\Delta}]^N-1}{1+\frac{16K_1^2(4\lambda^2+\lambda+5)}{1-3K_1^2\Delta^2}}\right\}.$$

由于$\Delta=\frac{T}{N}$，所以当$\Delta\to0$ ，即$N\to\infty$时，

$\left[1+\frac{16K_1^2\Delta(4\lambda^2+\lambda+5)}{1-3K_1^2\Delta^2}\right]^N=\left[1+\frac{16K_1^2T(4\lambda^2+\lambda+5)}{1-3K_1^2\Delta^2}\times\frac{1}{N}\right]^N$极限存在，故有界。类似地，

$[\frac{1}{1-\Delta}]^N$也有界。所以

$$E\left(\left|\varepsilon(t_k+\varsigma\Delta)\right|^2\middle|\mathscr{F}_0\right)\le C_5\Delta^{2\alpha\wedge2\gamma\wedge1}.$$

引理 2.5 如果假设 2.1-2.3 成立，则对任意的$t\in[0,T]$，其中$0<T<\infty$，当$\Delta\le\min\left\{1,\frac{1}{\sqrt{4K_2}},\frac{1}{2K_1}\right\}$，存在正常数$C_7,C_8$，使得

$$E\left(\left|\overline{Y}_{s_l}\right|^2\middle|\mathscr{F}_0\right)\le C_7,$$

$$E\left(\left|\overline{Y}_{s_l}^*\right|^2\middle|\mathscr{F}_0\right)\le C_8.$$

证明：由引理 2.1 和引理 2.4 可知

$$\begin{aligned}E\left(\left|\overline{Y}_{s_l}\right|^2\middle|\mathscr{F}_0\right)&=E\left(\left|\varepsilon(s_l)-X(s_l)\right|^2\middle|\mathscr{F}_0\right)\\&\le2E\left(\left|\varepsilon(s_l)\right|^2\middle|\mathscr{F}_0\right)+2E\left(\left|X(s_l)\right|^2\middle|\mathscr{F}_0\right)\\&\le C_7.\end{aligned}\tag{2-35}$$

对算法(2-5)式两边平方后取期望，由基本不等式$(a+b)^2\le2a^2+2b^2$可知

$$E\left(\left|\overline{Y}_{s_l}^*\right|^2\middle|\mathscr{F}_0\right)\le2E\left(\left|\overline{Y}(t_k)\right|^2\middle|\mathscr{F}_0\right)+2E\varsigma^2\Delta^2\left(f^2\left(t_k,\overline{Y}_{s_l}^*,\overline{Y}\left(t_k-\tau\left(t_k\right)\right)\right)\middle|\mathscr{F}_0\right).$$

由线性增长条件可知

$$E\left(\left|\overline{Y}_{s_l}^*\right|^2\middle|\mathscr{F}_0\right)\le2E\left(\left|\overline{Y}(t_k)\right|^2\middle|\mathscr{F}_0\right)+2\Delta^2K_2\left(1+E\left(\left|\overline{Y}_{s_l}^*\right|^2\middle|\mathscr{F}_0\right)+E\left(\left|\overline{Y}(t_k-\tau(t_k))\right|^2\middle|\mathscr{F}_0\right)\right).$$

移项整理后，由引理 2.1 可得

$$\begin{aligned}E\left(\left|Y_{s_l}^*\right|^2\middle|\mathscr{F}_0\right)&\le\frac{2}{1-2\Delta^2K_2}E\left(\left|\overline{Y}(t_k)\right|^2\middle|\mathscr{F}_0\right)+\frac{2\Delta^2K_2}{1-2\Delta^2K_2}E\left(\left|\overline{Y}(t_k-\tau(t_k))\right|^2\middle|\mathscr{F}_0\right)+\frac{2\Delta^2K_2}{1-2\Delta^2K_2}\\&\le\frac{2(1+\Delta^2K_2)}{1-2\Delta^2K_2}C_7+\frac{2\Delta^2K_2}{1-2\Delta^2K_2}\end{aligned}$$

$$\le C_8. \tag{2-36}$$

其中$C_8 = 4(1+K_2)C_7 + 2K_2$.

为证明全局误差的收敛速率，定义连续时间近似解，当$t \in [t_k, t_{k+1})$时，定义

$$\begin{aligned}\overline{Y}(t) &= \overline{Y}(t_k) + (t-t_k) f(t_k, \overline{Y}_k^*, \overline{Y}(t_k - \tau(t_k))). \\ &+ g(t_k, \overline{Y}_k^*, Y(t_k - \tau(t_k)))(\Delta W_t - \Delta W_k) + h(t_k, \overline{Y}_k^*, \overline{Y}(t_k - \tau(t_k)))(\Delta N_t - \Delta N_k).\end{aligned} \tag{2-37}$$

将(2-5)和(2-6)逐次代入(2-37)可得：

$$\begin{aligned}\overline{Y}(t) &= \overline{Y}_0 + (t-t_k) f(t_k, \overline{Y}_k^*, \overline{Y}(t_k - \tau(t_k))) \\ &+ g(t_k, \overline{Y}_k^*, \overline{Y}(t_k - \tau(t_k)))(\Delta W_t - \Delta W_k) + h(t_k, \overline{Y}_k^*, \overline{Y}(t_k - \tau(t_k)))(\Delta N_t - \Delta N_k). \\ &+ \sum_{i=0}^{k-1} \Delta f(t_i, \overline{Y}_i^*, \overline{Y}(t_i - \tau(t_i))) + \sum_{i=0}^{k-1} g(t_i, \overline{Y}_i^*, \overline{Y}(t_i - \tau(t_i)))\Delta W_i \\ &+ \sum_{i=0}^{k-1} h(t_i, \overline{Y}_i^*, \overline{Y}(t_i - \tau(t_i)))\Delta N_i\end{aligned} \tag{2-38}$$

接着定义 3 个示性函数

$$Z_1(t) = \sum_{i=0}^{N-1} \overline{Y}_i^* \chi_{[t_i, t_{i+1})}(t) + \overline{Y}_N \chi_{\{t=T\}}(t),$$

$$Z_2(t) = \sum_{i=0}^{N-1} \overline{Y}(t_i) \chi_{[t_i, t_{i+1})}(t) + \overline{Y}_N \chi_{\{t=T\}}(t),$$

$$\tilde{s} = \sum_{i=0}^{N-1} t_i \chi_{[t_i, t_{i+1})}(t),$$

其中 $\chi_F(t) = \begin{cases} 0 & t \notin F \\ 1 & t \in F \end{cases}$。于是式(2-38)可改写为

$$Y(t) = \overline{Y}_0 + \int_0^t f\left(\tilde{s}, Z_1(s), Z_2(s-\tau(s))\right) ds + \int_0^t g\left(\tilde{s}, Z_1(s), Z_2(s-\tau(s))\right) dW_s + \int_0^t h\left(\tilde{s}, Z_1(s), Z_2(s-\tau(s))\right) dN_s \tag{2-39}$$

接下来，给出定理 2.1 的证明。

定理 2.1 的证明：由方程(2-1)和式(2-39)可知

$$\begin{aligned}\varepsilon(t) &= \int_0^t \Big(f\left(s, X(s), X(s-\tau(s))\right) - f\left(\tilde{s}, Z_1(s), Z_2(s-\tau(s))\right) \Big) ds \\ &+ \int_0^t \Big(g\left(s, X(s), X(s-\tau(s))\right) - g\left(\tilde{s}, Z_1(s), Z_2(s-\tau(s))\right) \Big) dW_s \\ &+ \int_0^t h\left(s, X(s^-), X((s-\tau(s))^-)\right) - h\left(\tilde{s}, Z_1(s), Z_2(s-\tau(s))\right) dN_s.\end{aligned}$$

两边平方后，先取上确界，再取条件期望，得

$$E\left(\sup_{0\le u\le t}\left|\varepsilon(u)\right|^2\middle|\mathscr{F}_0\right)\le 3E\left(\sup_{0\le u\le t}\left|\int_0^u\left(f\left(s,X(s),X\left(s-\tau(s)\right)\right)-f\left(\tilde{s},Z_1(s),Z_2\left(s-\tau(s)\right)\right)\right)ds\right|^2\middle|\mathscr{F}_0\right)$$
$$+3E\left(\sup_{0\le u\le t}\left|\int_0^u\left(g\left(s,X(s),X\left(s-\tau(s)\right)\right)-g\left(\tilde{s},Z_1(s),Z_2\left(s-\tau(s)\right)\right)\right)dW_s\right|^2\middle|\mathscr{F}_0\right)$$
$$+3E\left(\sup_{0\le u\le t}\left|\int_0^u h\left(s,X(s^-),X\left((s-\tau(s))^-\right)\right)-h\left(\tilde{s},Z_1(s),Z_2\left(s-\tau(s)\right)\right)dN_s\right|^2\middle|\mathscr{F}_0\right)$$

(2-40)

接下来，对于(2-40)右边的三项分别做估计。对于$t\in[t_k,t_{k+1})$，根据*Hölder*不等式，假设2.2可知

$$3E\left(\sup_{0\le u\le t}\left|\int_0^u\left(f\left(s,X(s),X\left(s-\tau(s)\right)\right)-f\left(\tilde{s},Z_1(s),Z_2\left(s-\tau(s)\right)\right)\right)ds\right|^2\middle|\mathscr{F}_0\right)$$
$$\le 3TE\left(\int_0^t\left|f\left(s,X(s),X\left(s-\tau(s)\right)\right)-f\left(\tilde{s},Z_1(s),Z_2\left(s-\tau(s)\right)\right)\right|^2ds\middle|\mathscr{F}_0\right)$$
$$\le 3TK_1^2\left(\int_0^t\left|s-\tilde{s}\right|ds\right)+3TK_1^2E\left(\int_0^t\left|X(s)-Z_1(s)\right|^2ds\middle|\mathscr{F}_0\right)+3TK_1^2E\left(\int_0^t\left|X\left(s-\tau(s)\right)-Z_2\left(s-\tau(s)\right)\right|^2ds\middle|\mathscr{F}_0\right)$$
$$\le 3TK_1^2\left(\sum_{i=0}^{k-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}}\left(s-t_i\right)ds+\int_{t_k}^t\left|s-t_k\right|ds\right)+3TK_1^2E\left(\sum_{i=0}^{k-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}}\left|X(s)-Z_1(s)\right|^2ds+\int_{t_k}^t\left|X(s)-Z_1(s)\right|^2ds\middle|\mathscr{F}_0\right)$$
$$+3TK_1^2E\left(\int_0^t\left|X\left(s-\tau(s)\right)-Z_2\left(s-\tau(s)\right)\right|^2ds\middle|\mathscr{F}_0\right)$$

由于$\sum_{i=0}^{k-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}}\left(s-t_i\right)ds+\int_{t_k}^t\left|s-t_k\right|ds=\frac{k}{2}\Delta^2+\frac{1}{2}\Delta^2\le\frac{1}{2}N\Delta^2=\frac{1}{2}T\Delta$. 再利用引理2.4，式(2-20)和式(2-21)可得

$$3E\left(\sup_{0\le u\le t}\left|\int_0^u\left(f\left(s,X(s),X\left(s-\tau(s)\right)\right)-f\left(\tilde{s},Z_1(s),Z_2\left(s-\tau(s)\right)\right)\right)ds\right|^2\middle|\mathscr{F}_0\right)$$
$$\le\frac{3}{2}T^2K_1^2\Delta+6T^2K_1^2\left(C_2\Delta+\tilde{C}_2\Delta^2\right)+\frac{3+3K_1^2\Delta^2}{1-3K_1^2\Delta^2}\times 6T^2K_1^2C_5\Delta^{2\alpha\wedge 2\gamma\wedge 1}+3T^2K_1^2C_5\Delta^{2\alpha\wedge 2\gamma\wedge 1}$$
$$\le\frac{3}{2}T^2K_1^2\Delta+6T^2K_1^2\left(C_2\Delta+\tilde{C}_2\Delta^2\right)+\frac{7+3K_1^2\Delta^2}{1-3K_1^2\Delta^2}\times 3T^2K_1^2C_5\Delta^{2\alpha\wedge 2\gamma\wedge 1}$$

(2-41)

先利用B-D-G不等式得到

$$3E\left(\sup_{0\le u\le t}\left|\int_0^u\left(g\left(s,X(s),X\left(s-\tau(s)\right)\right)-g\left(\tilde{s},Z_1\left(s\right),Z_2\left(s-\tau\left(s\right)\right)\right)\right)dW_s\right|^2\middle|\mathscr{F}_0\right)$$

$$\le 12E\left(\int_0^t\left|g\left(s,X(s),X\left(s-\tau(s)\right)\right)-g\left(\tilde{s},Z_1\left(s\right),Z_2\left(s-\tau\left(s\right)\right)\right)\right|^2ds\middle|\mathscr{F}_0\right)$$

再利用假设 2.2，同第一项的方法可得

$$3E\left(\sup_{0\le u\le t}\left|\int_0^u\left(g\left(s,X(s),X\left(s-\tau(s)\right)\right)-g\left(\tilde{s},Z_1\left(s\right),Z_2\left(s-\tau\left(s\right)\right)\right)\right)dW_s\right|^2\middle|\mathscr{F}_0\right)$$

$$\le 6TK_1^2\Delta+24TK_1^2\left(C_2\Delta+\tilde{C}_2\Delta^2\right)+\frac{7+3K_1^2\Delta^2}{1-3K_1^2\Delta^2}\times 12TK_1^2C_5\Delta^{2\alpha\wedge 2\gamma\wedge 1} \tag{2-42}$$

类似地，估计(2-40)右边的第三项，得

$$3E\left(\sup_{0\le u\le t}\left|\int_0^u h\left(s,X(s^-),X\left((s-\tau(s))^-\right)\right)-h\left(\tilde{s},Z_1\left(s\right),Z_2\left(s-\tau\left(s\right)\right)\right)dN_s\right|^2\middle|\mathscr{F}_0\right)$$

$$\le 6E\left(\sup_{0\le u\le t}\left|\int_0^u\left(h\left(s,X(s^-),X\left((s-\tau(s))^-\right)\right)-h\left(\tilde{s},Z_1\left(s\right),Z_2\left(s-\tau\left(s\right)\right)\right)\right)d\tilde{N}_s\right|^2\middle|\mathscr{F}_0\right)$$

$$+6\lambda^2E\left(\sup_{0\le u\le t}\left|\int_0^u\left(h\left(s,X(s^-),X\left((s-\tau(s))^-\right)\right)-h\left(\tilde{s},Z_1\left(s\right),Z_2\left(s-\tau\left(s\right)\right)\right)\right)ds\right|^2\middle|\mathscr{F}_0\right)$$

$$\le\left(24\lambda+8\lambda^2T\right)\int_0^t E\left(\left|h\left(s,X(s^-),X\left((s-\tau(s))^-\right)\right)-h\left(\tilde{s},Z_1\left(s\right),Z_2\left(s-\tau\left(s\right)\right)\right)\right|^2\middle|\mathscr{F}_0\right)ds$$

$$\le\left(12\lambda+4\lambda^2T\right)TK_1^2\Delta+2TK_1^2\left(24\lambda+8\lambda^2T\right)\left(C_2\Delta+\tilde{C}_2\Delta^2\right)+\frac{7+3K_1^2\Delta^2}{1-3K_1^2\Delta^2}\times\left(24\lambda+8\lambda^2T\right)TK_1^2C_5\Delta^{2\alpha\wedge 2\gamma\wedge 1} \tag{2-43}$$

将(2-41)- (2-43)代入(2-40)整理可得

$$E\left(\sup_{0\le t\le T}\left|\varepsilon(t)\right|^2\middle|\mathscr{F}_0\right)\le\tilde{C}\Delta^{2\alpha\wedge 2\gamma\wedge 1}$$

由于 $\sup\limits_{-\tau\le t\le T}\left|\varepsilon\left(t\right)\right|^2=\sup\limits_{-\tau\le t\le 0}\left|\varepsilon\left(t\right)\right|^2\vee\sup\limits_{0\le t\le T}\left|\varepsilon\left(t\right)\right|^2$，运用假设 2.1 得

$$\begin{aligned}E\left(\sup_{-\tau\le t\le T}\left|\varepsilon\left(t\right)\right|^2\middle|\mathscr{F}_0\right)&\le E\left(\sup_{0\le t\le T}\left|\varepsilon\left(t\right)\right|^2\middle|\mathscr{F}_0\right)+E\left(\sup_{-\tau\le t\le 0}\left|\varepsilon\left(t\right)\right|^2\right)\\&\le\tilde{C}\Delta^{2\alpha\wedge 2\gamma\wedge 1}+K\Delta^{2\gamma}\\&\le C\Delta^{2\alpha\wedge 2\gamma\wedge 1}.\end{aligned}$$

2.2 数值模拟

为了说明本文所给出的均方稳定条件以及算法的有效性，本节将对方程(2-1)进行数值模拟.文中所给出的近似解和误差都是100次计算得出的均值。

例 2.1[38] 考虑如下形式的方程

$$\begin{cases} dX(t) = \left[aX(t) + bX(t-1)\right]dt + cX(t-1)dW(t) + DX(t)dN(t), t \geq 0 \\ X(t) = t+1, t \in [-1, 0] \end{cases} \tag{2-44}$$

对式(2-44)的系数取 $a = -9, b = 7, c = 1, D = 0.2, \lambda = 1$. 精确解是根据[38]的方法得到的，即取步长 1/1024 的 Euler-Maruyama 算法的近似解作为精确解，图 2.1 给出 $\Delta = 0.01$ 的 Split-step 算法的近似解和 Euler-Maruyama 算法近似解，从图 2.1 可以看出 Split-step 算法的数值更近似于精确解. 图 2.2 显示的是 Split-step 算法的近似解和 Euler-Maruyama 算法近似解与精确解之间的误差，由图 2.2 可知，Split-step 算法的近似解与精确解之间的误差更小。此例说明 Split-step 算法要优于 Euler-Maruyama 算法。

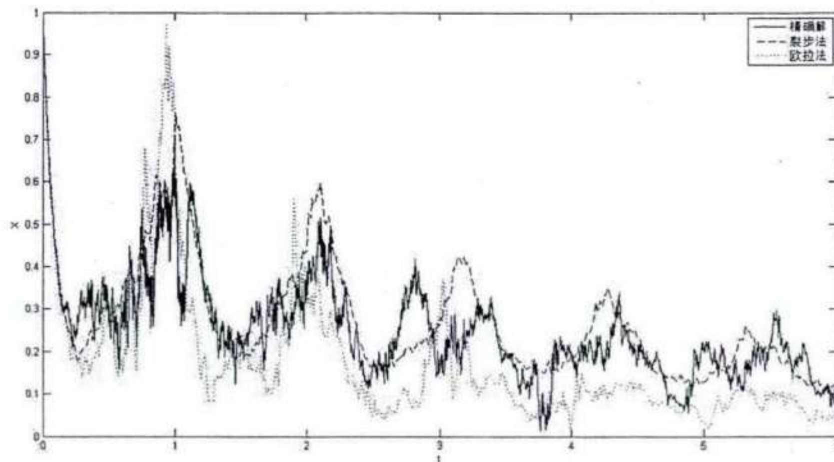


图 2.1 精确解 Split-step 算法近似解、和 Euler-Maruyama 算法近似解

Fig. 2.1 Exact Solution, Solution of the Euler-Maruyama scheme and of the Split-step scheme

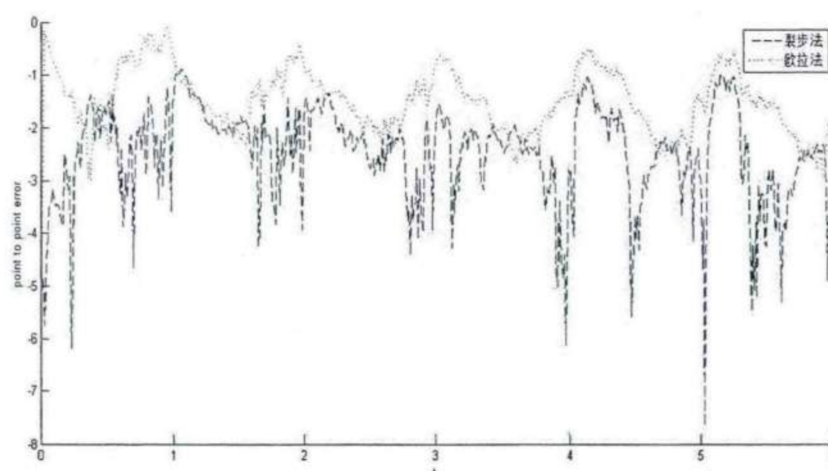


图 2.2 离散解和精确解点对点之间取对数后的误差

Fig. 2.2 Point mean square errors of the Euler scheme and of the Split-step scheme in a logarithmic scale

例 2.2 考虑如下形式的方程

$$\begin{cases} dX(t) = \left[-2X(t) + X(t-1)\right]dt + X(t)dW(t) - X(t)dN(t), t \geq 0 \\ X(t) = t+1, t \in [-1, 0] \end{cases} \tag{2-45}$$

图 2.3 的精确解是取步长 1/1024 的 Euler-Maruyama 算法的近似解作为精确解，从图 2.3 可以看出 Split-step 算法的数值更近似于精确解。 图 2.4 显示的是 Split-step 算法的近似解和 Euler-Maruyama 算法近似解与精确解之间的误差，由图 2.4 可知，Split-step 算法的近似解与精确解之间的误差更小。此例同样说明 Split-step 算法要优于 Euler-Maruyama 算法。

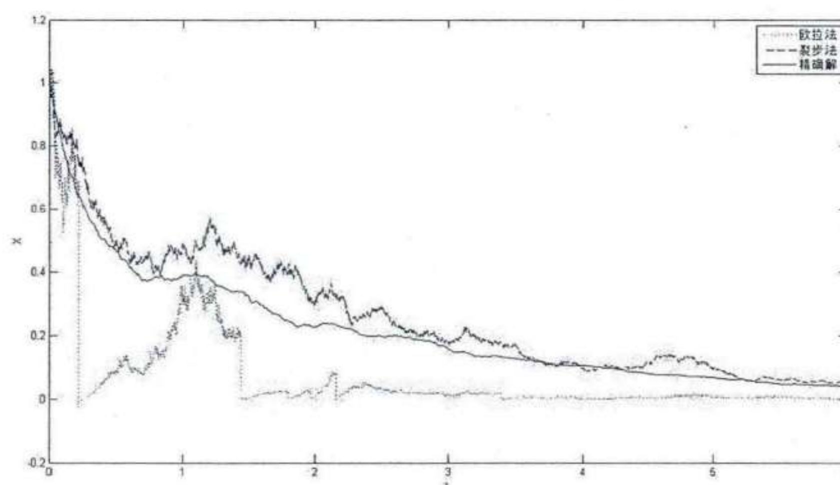


图 2.3 $\Delta = 0.01$ 时 **Split-step** 算法、**Euler-Maruyama** 算法和精确解模拟结果

Fig. 2.3 Exact Solution, Solution of the Euler-Maruyama scheme and of the Split-step scheme with

$\Delta = 0.01$

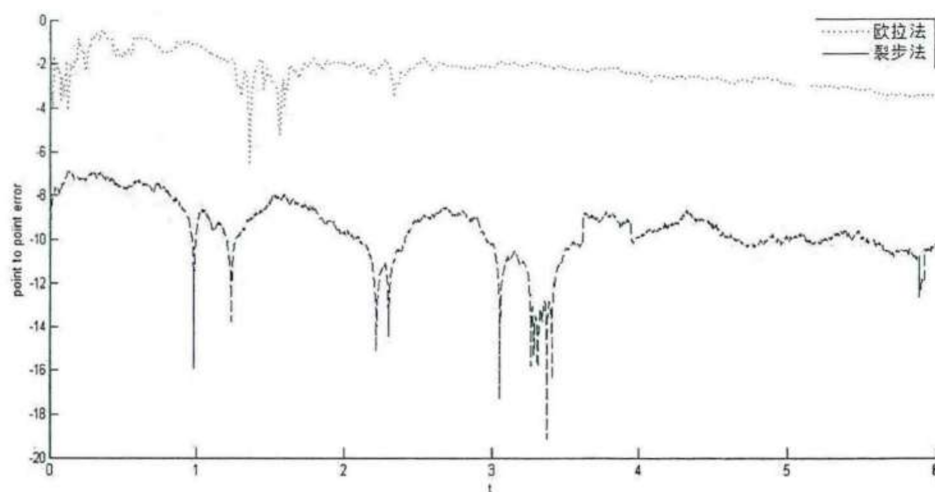


图 2.4 离散解和精确解点对点之间取对数后的误差

Fig. 2.4 Point mean square errors of the Euler scheme and of the Split-step scheme in a logarithmic scale

第3章 带跳的随机微分方程$SS\theta$法近似解的收敛速率

本章节考虑带跳的随机微分方程：

$$\begin{cases} dX(t)=f(t,X(t))dt+g(t,X(t))dW_t+h(t,X(t^-))dN_t \quad t\in[0,T] \\ X(0)=\varphi(0) \end{cases} \tag{3-1}$$

其中W_t为$\mathscr{F}_t$适应的一维布朗运动，N_t为参数为λt的一维泊松过程，且W_t与N_t相互独立．对于所有的$t\ge 0$，$\varphi(0)$与W_t和N_t相互独立，且$E|\varphi(0)|^2<\infty$；$X(t)$为属于$C([0,T];R^n)$的随机变量。假设f,g,h为其所有变元的连续函数。

为了保证方程(3-1)存在唯一解，还需要引入如下假设：

假设3.1 方程系数f,g,h关于t满足$H\ddot{o}lder$连续，关于第二个变元满足Lipschitz条件，即对于任意的$0\le t_1\le T,0\le t_2\le T$以及$x,y\in R$，存在正常数$K_1$，使得

$$|f(t_1,x)-f(t_2,y)|\vee|g(t_1,x)-g(t_2,y)|\vee|h(t_1,x)-h(t_2,y)|\le K_1\left(|t_1-t_2|^{\frac{1}{2}}+|x-y|\right) \tag{3-2}$$

假设 3.2 系数f,g,h均满足线性增长条件，即对任意的$0\le t\le T$以及$x\in R$，存在正常数K_2，使得

$$|f(t,x)|^2\vee|g(t,x)|^2\vee|h(t,x)|^2\le K_2(1+|x|^2) \tag{3-3}$$

由文献[30]可知，在上述假设条件下，方程(3-1)存在唯一解。

现在，将对带跳的非线性随机微分方程(3-1)建立$SS\theta$算法。取Δ为步长，$T=N\Delta$，其中N均为正整数.节点$t_k=k\Delta$，$k=0,1,\ldots,N$.当$k=0$时，$Y_0=\varphi(0)$；而当$k\ge 0$时，

$$Y_k^* = Y_k+\theta\Delta f(t_k,Y_k^*)+(1-\theta)\Delta f(t_k,Y_k) \tag{3-4}$$

$$Y_{k+1}=Y_k^*+g(t_k,Y_k^*)\Delta W_k+h(t_k,Y_k^*)\Delta N_k \tag{3-5}$$

因为Y_k^*是(3-4)的解，所以Y_k^*是$\mathscr{F}_{t_k}$适应的；增量$\Delta N_k\stackrel{\Delta}{=}N(t_{k+1})-N(t_k)$，服从参数为$\lambda\Delta$的泊松分布；增量$\Delta W_k\stackrel{\Delta}{=}W(t_{k+1})-W(t_k)$为相互独立的且服从$N(0,\Delta)$的高斯随机变量。

给定离散时间近似解后，再定义连续时间近似解。当$t\in[t_k,t_{k+1})$时，定义

$$Y(t)=Y_k+\theta(t-t_k)f(t_k,Y_k^*)+(1-\theta)(t-t_k)f(t_k,Y_k).$$

$$+g\left(t_k,Y_k^*\right)\left(W_t-W_{t_k}\right)+h\left(t_k,Y_k^*\right)\left(N_t-N_{t_k}\right) \tag{3-6}$$

现在将(3-4)和(3-5)逐次代入(3-6)可得：

$$\begin{aligned}
Y(t)&=Y_{k-1}+\theta\left(t-t_k\right)f\left(t_k,Y_k^*\right)+(1-\theta)\left(t-t_k\right)f\left(t_k,Y_k\right)\\
&\quad+g\left(t_k,Y_k^*\right)\left(W_t-W_{t_k}\right)+h\left(t_k,Y_k^*\right)\left(N_t-N_{t_k}\right)+\theta\Delta f\left(t_{k-1},Y_{k-1}^*\right)\\
&\quad+(1-\theta)\Delta f\left(t_{k-1},Y_{k-1}\right)+g\left(t_{k-1},Y_{k-1}^*\right)\Delta W_{k-1}+h\left(t_{k-1},Y_{k-1}^*\right)\Delta N_{k-1}\\
&=Y_0+\theta\left(t-t_k\right)f\left(t_k,Y_k^*\right)+(1-\theta)\left(t-t_k\right)f\left(t_k,Y_k\right)\\
&\quad+g\left(t_k,Y_k^*\right)\left(W_t-W_{t_k}\right)+h\left(t_k,Y_k^*\right)\left(N_t-N_{t_k}\right)+\theta\sum_{i=0}^{k-1}\Delta f\left(t_i,Y_i^*\right)\\
&\quad+(1-\theta)\sum_{i=0}^{k-1}\Delta f\left(t_i,Y_i\right)+\sum_{i=0}^{k-1}g\left(t_i,Y_i^*\right)\Delta W_i+\sum_{i=0}^{k-1}h\left(t_i,Y_i^*\right)\Delta N_i
\end{aligned} \tag{3-7}$$

接着定义3个示性函数

$$Z_1(t)=\sum_{i=0}^{N-1}Y_i\chi_{[t_i,t_{i+1})}(t)+Y_N\chi_{\{t=T\}}(t),$$

$$Z_2(t)=\sum_{i=0}^{N-1}Y_i^*\chi_{[t_i,t_{i+1})}(t)+Y_N\chi_{\{t=T\}}(t),$$

$$\tilde{s}=\sum_{i=0}^{N-1}t_i\chi_{[t_i,t_{i+1})}(t),$$

其中 $\chi_F(t)=\begin{cases}0 & t\notin F\\ 1 & t\in F\end{cases}$。于是式(3-7)可改写为

$$\begin{aligned}
Y(t)&=Y_0+\int_0^t(1-\theta)f\left(\tilde{s},Z_1(s)\right)ds+\int_0^t\theta f\left(\tilde{s},Z_2(s)\right)ds\\
&\quad+\int_0^t g\left(\tilde{s},Z_2(s)\right)dW_s+\int_0^t h\left(\tilde{s},Z_2(s)\right)dN_s
\end{aligned} \tag{3-8}$$

3.1 近似解的估计

为了证明全局误差的收敛速率，本节将对 $SS\theta$ 算法的近似解作估计，引入如下引理。

引理 3.1 设 $f:[0,T]\times R\to R$ 满足假设3.1和假设3.2，Y_k 和 Y_k^* 都是依据 $SS\theta$ 算法得到的近似解，则对于任意的 $0<\theta\le 1$，当 $\Delta\le\min\left\{1,\dfrac{1}{4K_2}\right\}$，存在非负常数 C_1,C_2，使得

$$E\left(\left|Y_k^*\right|^2\middle|\mathscr{F}_0\right)\le C_1E\left(\left|Y_k\right|^2\middle|\mathscr{F}_0\right)+C_2.$$

证明：由(3-4) 和基本不等式$2ab \le a^2+b^2$，可知

$$\begin{aligned}
\left|Y_k^*\right|^2 &= \left|Y_k+\theta\Delta f\left(t_k,Y_k^*\right)+(1-\theta)\Delta f\left(t_k,Y_k\right)\right|^2 \\
&= \left|Y_k\right|^2+\left|\theta\Delta f\left(t_k,Y_k^*\right)\right|^2+\left|(1-\theta)\Delta f\left(t_k,Y_k\right)\right|^2+2\theta\Delta f\left(t_k,Y_k^*\right)Y_k \\
&\quad +2(1-\theta)\Delta f\left(t_k,Y_k\right)Y_k+2\theta(1-\theta)\Delta^2 f\left(t_k,Y_k\right)f\left(t_k,Y_k^*\right) \\
&\le \left|Y_k\right|^2+\left|\theta\Delta f\left(t_k,Y_k^*\right)\right|^2+\left|(1-\theta)\Delta f\left(t_k,Y_k\right)\right|^2+\theta\Delta\left|Y_k\right|^2+\theta\Delta\left|f\left(t_k,Y_k^*\right)\right|^2 \\
&\quad +(1-\theta)\Delta\left|Y_k\right|^2+(1-\theta)\Delta\left|f\left(t_k,Y_k\right)\right|^2+\theta(1-\theta)\Delta^2\left|f\left(t_k,Y_k\right)\right|^2 \\
&\quad +\theta(1-\theta)\Delta^2\left|f\left(t_k,Y_k^*\right)\right|^2 \\
&\le (1+\Delta)\left|Y_k\right|^2+\left(\theta\Delta+\theta\Delta^2\right)\left|f\left(t_k,Y_k^*\right)\right|^2+(1-\theta)\Delta(1+\Delta)\left|f\left(t_k,Y_k\right)\right|^2.
\end{aligned}$$

由假设 3.2 可知

$$\begin{aligned}
\left|Y_k^*\right|^2 &\le (1+\Delta)\left|Y_k\right|^2+\left(\theta\Delta+\theta\Delta^2\right)K_2\left(1+\left|Y_k^*\right|^2\right)+(1-\theta)\Delta(1+\Delta)K_2\left(1+\left|Y_k\right|^2\right) \\
&\le (1+\Delta)\left(1+(1-\theta)\Delta K_2\right)\left|Y_k\right|^2+2\theta\Delta K_2\left|Y_k^*\right|^2+\Delta(1+\Delta)K_2.
\end{aligned}$$

由于$0<\theta\le 1$，$\Delta\le\min\left\{1,\dfrac{1}{4K_2}\right\}$，所以$2K_2\theta\Delta\le 2K_2\Delta\le\dfrac{1}{2}$，故移项整理后得

$$\begin{aligned}
\left|Y_k^*\right|^2 &\le \frac{(1+\Delta)\left(1+(1-\theta)\Delta K_2\right)}{1-2K_2\theta\Delta}\left|Y_k\right|^2+\frac{\Delta(1+\Delta)K_2}{1-2K_2\theta\Delta} \\
&\le 2(1+\Delta)\left(1+(1-\theta)\Delta K_2\right)\left|Y_k\right|^2+2\Delta(1+\Delta)K_2 \\
&\le 2\left(1+\left(2K_2+1\right)\right)\left|Y_k\right|^2+4K_2
\end{aligned}$$

两边取条件期望，且令$C_1=2\left(1+\left(2K_2+1\right)\right),C_2=4K_2$，可得引理的结论。

引理 3.2 若$f:[0,T]\times R\to R$，$g:[0,T]\times R\to R$和$h:[0,T]\times R\to R$都满足假设 3.1 和假设 3.2，Y_k和Y_k^*都是依据$SS\theta$算法得到的近似解，则对于任意$0<\theta\le 1,$，当$\Delta\le\min\left\{1,\dfrac{1}{4K_2}\right\}$时，存在非负常数$C_3,C_4$，使得$E\left(\left|Y_k\right|^2|\mathscr{F}_0\right)\le C_3,E\left(\left|Y_k^*\right|^2|\mathscr{F}_0\right)\le C_4$.

证明：对(3-6)两边取平方后，再取关于$\mathscr{F}_0$的条件期望，得到

$$E\left(|Y_{k+1}|^2|\mathscr{F}_0\right)=E\left(|Y_k|^2|\mathscr{F}_0\right)+E\left(\left|\theta\Delta f\left(t_k,Y_k^*\right)\right|^2|\mathscr{F}_0\right)+E\left(\left|(1-\theta)\Delta f\left(t_k,Y_k\right)\right|^2|\mathscr{F}_0\right)+\Delta E\left(\left|g\left(t_k,Y_k^*\right)\right|^2|\mathscr{F}_0\right)$$
$$+\left(\lambda\Delta+\lambda^2\Delta^2\right)E\left(\left|h\left(t_k,Y_k^*\right)\right|^2|\mathscr{F}_0\right)+2\theta\Delta E\left(\left(f\left(t_k,Y_k^*\right)Y_k\right)|\mathscr{F}_0\right)$$
$$+2(1-\theta)\Delta E\left(\left(f\left(t_k,Y_k\right)Y_k\right)|\mathscr{F}_0\right)+2\lambda\Delta E\left(\left(Y_kh\left(t_k,Y_k^*\right)\right)|\mathscr{F}_0\right)$$
$$+2(1-\theta)\theta\Delta^2E\left(\left(f\left(t_k,Y_k^*\right)f\left(t_k,Y_k\right)\right)|\mathscr{F}_0\right)+2\lambda\theta\Delta^2E\left(\left(f\left(t_k,Y_k^*\right)h\left(t_k,Y_k^*\right)\right)|\mathscr{F}_0\right)$$
$$+2\lambda(1-\theta)\Delta^2E\left(\left(f\left(t_k,Y_k\right)h\left(t_k,Y_k^*\right)\right)|\mathscr{F}_0\right)$$

利用基本不等式$2ab\le a^2+b^2$，可得

$$E\left(|Y_{k+1}|^2|\mathscr{F}_0\right)\le E\left(|Y_k|^2|\mathscr{F}_0\right)+E\left(\left|\theta\Delta f\left(t_k,Y_k^*\right)\right|^2|\mathscr{F}_0\right)+E\left(\left|(1-\theta)\Delta f\left(t_k,Y_k\right)\right|^2|\mathscr{F}_0\right)$$
$$+\Delta E\left(\left|g\left(t_k,Y_k^*\right)\right|^2|\mathscr{F}_0\right)+\left(\lambda\Delta+\lambda^2\Delta^2\right)E\left(\left|h\left(t_k,Y_k^*\right)\right|^2|\mathscr{F}_0\right)+\theta\Delta E\left(|Y_k|^2|\mathscr{F}_0\right)+\theta\Delta E\left(\left|f\left(t_k,Y_k^*\right)\right|^2|\mathscr{F}_0\right)$$
$$+(1-\theta)\Delta E\left(|Y_k|^2|\mathscr{F}_0\right)+(1-\theta)\Delta E\left(\left|f\left(t_k,Y_k\right)\right|^2|\mathscr{F}_0\right)+\lambda\Delta E\left(|Y_k|^2|\mathscr{F}_0\right)$$
$$+\lambda\Delta E\left(\left|h\left(t_k,Y_k^*\right)\right|^2|\mathscr{F}_0\right)+(1-\theta)\theta\Delta^2E\left(\left|f\left(t_k,Y_k^*\right)\right|^2|\mathscr{F}_0\right)$$
$$+(1-\theta)\theta\Delta^2E\left(\left|f\left(t_k,Y_k\right)\right|^2|\mathscr{F}_0\right)+\lambda\theta\Delta^2E\left(\left|f\left(t_k,Y_k^*\right)\right|^2|\mathscr{F}_0\right)+\lambda\theta\Delta^2E\left(\left|h\left(t_k,Y_k^*\right)\right|^2|\mathscr{F}_0\right)$$
$$+\lambda(1-\theta)\Delta^2E\left(\left|f\left(t_k,Y_k\right)\right|^2|\mathscr{F}_0\right)+\lambda(1-\theta)\Delta^2E\left(\left|h\left(t_k,Y_k^*\right)\right|^2|\mathscr{F}_0\right)$$
$$\le(1+\Delta+\lambda\Delta)E\left(|Y_k|^2|\mathscr{F}_0\right)+\Delta E\left(\left|g\left(t_k,Y_k^*\right)\right|^2|\mathscr{F}_0\right)$$
$$+\left((1-\theta)\Delta+(1-\theta)\Delta^2+\lambda(1-\theta)\Delta^2\right)E\left(\left|f\left(t_k,Y_k\right)\right|^2|\mathscr{F}_0\right)$$
$$+\left(\theta\Delta+\theta\Delta^2+\lambda\theta\Delta^2\right)E\left(\left|f\left(t_k,Y_k^*\right)\right|^2|\mathscr{F}_0\right)$$
$$+\left(2\lambda\Delta+\lambda^2\Delta^2+\lambda\Delta^2\right)E\left(\left|h\left(t_k,Y_k^*\right)\right|^2|\mathscr{F}_0\right)$$

由假设 3.2 可知

$$E\left(|Y_{k+1}|^2|\mathscr{F}_0\right)\le\left(1+\Delta+\lambda\Delta+\left((1-\theta)\Delta+(1-\theta)\Delta^2+\lambda(1-\theta)\Delta^2\right)K_2\right)E\left(|Y_k|^2|\mathscr{F}_0\right)$$
$$+\left(\theta\Delta+\theta\Delta^2+\lambda\theta\Delta^2+\Delta+2\lambda\Delta+\lambda^2\Delta^2+\lambda\Delta^2\right)K_2E\left(|Y_k^*|^2|\mathscr{F}_0\right)$$
$$+\left(2\Delta+\Delta^2+2\lambda\Delta+\lambda^2\Delta^2+2\lambda\Delta^2\right)K_2$$

利用引理 3.1 的结论，可知

$$E\left(|Y_{k+1}|^2|\mathscr{F}_0\right)\le(1+C_6\Delta)E\left(|Y_k|^2|\mathscr{F}_0\right)+C_5\Delta \tag{3-9}$$

这里

$C_5=\left(3+4\lambda+\lambda^2\right)K_2\left(C_2+1\right),$

$C_6=\left(1+\lambda+(2+\lambda)K_2\right)+\left(3+4\lambda+\lambda^2\right)K_2C_1.$

对(3-9)式逐次迭代，得到

$$E\left(\left|Y_{k+1}\right|^2 \middle| \mathscr{F}_0\right) \le C_5\Delta\sum_{i=0}^{k}\left(1+C_6\Delta\right)^i + \left(1+C_6\Delta\right)^{k+1} E\left|Y_0\right|^2$$
$$\le \frac{C_5}{C_6}\left(\left(1+C_6\Delta\right)^{k+1}-1\right)+\left(1+C_6\Delta\right)^{k+1} E\left|Y_0\right|^2$$

又由于$k+1\le N,\Delta=\frac{T}{N}$和$\left(1+\frac{C_6T}{N}\right)^N \le e^{C_6T}$,所以

$$E\left(\left|Y_{k+1}\right|^2 \middle| \mathscr{F}_0\right) \le \frac{C_5}{C_6}\left(\left(1+\frac{C_6T}{N}\right)^{k+1}-1\right)+\left(1+\frac{C_6T}{N}\right)^{k+1} E\left|Y_0\right|^2$$
$$\le \frac{C_5}{C_6}\left(\left(1+\frac{C_6T}{N}\right)^{N}-1\right)+\left(1+\frac{C_6T}{N}\right)^{N} E\left|Y_0\right|^2$$
$$\le C_3$$

其中$C_3=\frac{C_5}{C_6}\left(e^{C_6T}-1\right)+e^{C_6T}E\left|Y_0\right|^2$.

再利用引理 3.1，便可得出$E\left(\left|Y_{k+1}^*\right|^2 \middle| \mathscr{F}_0\right)\le C_4$,其中$C_4=C_1C_3+C_2$.

现在对$Y(t)-Z_1(t)$和$Y(t)-Z_2(t)$的均方条件期望作估计。

引理 3.3 设$f:[0,T]\times R\to R$，$g:[0,T]\times R\to R$和$h:[0,T]\times R\to R$都满足假设 3.1 和假设 3.2，Y_k和Y_k^*都是依据$SS\theta$算法得到的近似解，则对于任意的$0<\theta\le 1$,，当$\Delta\le\min\left\{1,\frac{1}{4K_2}\right\}$时，存在非负常数$C_7,C_8$，使得

$$E\left(\left|Y(t)-Z_1(t)\right|^2 \middle| \mathscr{F}_0\right)\le C_7\Delta,$$
$$E\left(\left|Y(t)-Z_2(t)\right|^2 \middle| \mathscr{F}_0\right)\le C_8\Delta.$$

证明：当$t\in\left[t_k,t_{k+1}\right)$时，由(3-6)式可知

$$Y(t)-Z_1(t)=\theta\left(t-t_k\right)f\left(t_k,Y_k^*\right)+\left(1-\theta\right)\left(t-t_k\right)f\left(t_k,Y_k\right)$$
$$+g\left(t_k,Y_k^*\right)\left(W_t-W_{t_k}\right)+h\left(t_k,Y_k^*\right)\left(N_t-N_{t_k}\right),$$

利用假设 3.2，基本不等式$\left(a+b+c+d\right)^2\le 4a^2+4b^2+4c^2+4d^2$可得

$$E\left(\left|Y(t)-Z_1(t)\right|^2|\mathscr{F}_0\right)\le 4\theta^2\Delta^2K_2\left(1+E\left(\left|Y_k^*\right|^2|\mathscr{F}_0\right)\right)+4(1-\theta)^2\Delta^2K_2\left(1+E\left(\left|Y_k\right|^2|\mathscr{F}_0\right)\right)$$
$$+4\Delta K_2\left(1+E\left(\left|Y_k^*\right|^2|\mathscr{F}_0\right)\right)+4\left(\lambda\Delta+\lambda^2\Delta^2\right)K_2\left(1+E\left(\left|Y_k^*\right|^2|\mathscr{F}_0\right)\right)$$
$$\le 4(1-\theta)^2\Delta^2K_2E\left(\left|Y_k\right|^2|\mathscr{F}_0\right)+4\theta^2\Delta^2K_2$$
$$+4(1-\theta)^2\Delta^2K_2+4\Delta K_2+4\left(\lambda\Delta+\lambda^2\Delta^2\right)K_2$$
$$+\left(4\theta^2\Delta^2K_2+4\Delta K_2+4\left(\lambda\Delta+\lambda^2\Delta^2\right)K_2\right)E\left(\left|Y_k^*\right|^2|\mathscr{F}_0\right)$$

利用引理 3.2 可得

$$E\left(\left|Y(t)-Z_1(t)\right|^2|\mathscr{F}_0\right)\le C_7\Delta$$

其中$C_7=4K_2C_3+4\left(2+\lambda+\lambda^2\right)K_2\left(C_4+1\right)+4K_2$.

由于$t\in\left[t_k,t_{k+1}\right)$时，根据$Z_1(t),Z_2(t)$ 的定义及(3-4)式，可知

$$Z_2(t)-Z_1(t)=\theta\Delta_kf\left(t_k,Y_k^*\right)+(1-\theta)\Delta_kf\left(t_k,Y_k\right)$$

同样利用假设 3.2，基本不等式$(a+b)^2\le 2a^2+2b^2$可得

$$E\left(\left|Z_2(t)-Z_1(t)\right|^2|\mathscr{F}_0\right)=E\left(\left|\theta\Delta f\left(t_k,Y_k^*\right)+(1-\theta)\Delta f\left(t_k,Y_k\right)\right|^2|\mathscr{F}_0\right)$$
$$\le 2\theta^2\Delta^2K_2\left(1+E\left(\left|Y_k^*\right|^2|\mathscr{F}_0\right)\right)+2(1-\theta)^2\Delta^2K_2\left(1+E\left(\left|Y_k\right|^2|\mathscr{F}_0\right)\right)$$

利用引理 3.2 可得

$$E\left(\left|Z_2(t)-Z_1(t)\right|^2|\mathscr{F}_0\right)\le C_9\Delta$$

其中$C_9=2K_2\left(2+C_4+C_3\right)$. 于是

$$E\left(\left|Y(t)-Z_2(t)\right|^2|\mathscr{F}_0\right)\le 2E\left(\left|Y(t)-Z_2(t)\right|^2|\mathscr{F}_0\right)+2E\left(\left|Z_2(t)-Z_1(t)\right|^2|\mathscr{F}_0\right),$$
$$\le C_8\Delta$$

这里$C_8=2C_7+2C_9$.

3.2 收敛速率

本节将给出$SS\theta$算法的收敛速率。

定理 3.1 在假设 3.1 和假设 3.2 下，当$\Delta\le\min\left\{1,\frac{1}{4K_2}\right\}$时，存在非负实数$C$，使得方程 (3-1) 的解 $X(t)$ 和方程 (3-8) 给出的连续时间近似解 $Y(t)$ 满足不等式

$$E\left(\sup_{0\le t\le T}\left|X(t)-Y(t)\right|^2\middle|\mathscr{F}_0\right)\le C\Delta.$$

证明：由方程(3-1)和方程(3-8)可知

$$X(t)-Y(t)=(1-\theta)\int_0^t\left(f(s,X(s))-f(\tilde{s},Z_1(s))\right)ds+\theta\int_0^t\left(f(s,X(s))-f(\tilde{s},Z_2(s))\right)ds$$
$$+\int_0^t\left(g(s,X(s))-g(\tilde{s},Z_2(s))\right)dW_s+\int_0^t\left(h(s,X(s))-h(\tilde{s},Z_2(s))\right)dN_s,$$

两边平方后，先取上确界再取条件期望，可得

$$E\left(\sup_{0\le r\le t}\left|X(r)-Y(r)\right|^2\middle|\mathscr{F}_0\right)\le 4(1-\theta)^2E\left(\sup_{0\le r\le t}\left|\int_0^r\left(f(s,X(s))-f(\tilde{s},Z_1(s))\right)ds\right|^2\middle|\mathscr{F}_0\right)$$
$$+4\theta^2E\left(\sup_{0\le r\le t}\left|\int_0^r\left(f(s,X(s))-f(\tilde{s},Z_2(s))\right)ds\right|^2\middle|\mathscr{F}_0\right)$$
$$+4E\left(\sup_{0\le r\le t}\left|\int_0^r\left(g(s,X(s))-g(\tilde{s},Z_2(s))\right)dW_s\right|^2\middle|\mathscr{F}_0\right)$$
$$+4E\left(\sup_{0\le r\le t}\left|\int_0^r\left(h(s,X(s))-h(\tilde{s},Z_2(s))\right)dN_s\right|^2\middle|\mathscr{F}_0\right)\tag{3-10}$$

接下来，依次对(3-10)式右边的四项分别做估计。

对于$t\in[t_k,t_{k+1})$，根据$H\ddot{o}lder$不等式，假设3.1可知

$$4(1-\theta)^2E\left(\sup_{0\le r\le t}\left|\int_0^r\left(f(s,X(s))-f(\tilde{s},Z_1(s))\right)ds\right|^2\middle|\mathscr{F}_0\right)$$
$$\le 4(1-\theta)^2TE\left(\int_0^t\left|f(s,X(s))-f(\tilde{s},Z_1(s))\right|^2ds\middle|\mathscr{F}_0\right)$$
$$\le 8(1-\theta)^2TK_1^2\left(\int_0^t|s-\tilde{s}|ds\right)$$
$$+8(1-\theta)^2TK_1^2E\left(\int_0^t\left|X(s)-Z_1(s)\right|^2ds\middle|\mathscr{F}_0\right)$$
$$\le 8(1-\theta)^2TK_1^2\left(\sum_{i=0}^{k-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}}(s-t_i)ds+\int_{t_k}^t(s-t_k)ds\right)$$
$$+16(1-\theta)^2TK_1^2E\left(\int_0^t\left|X(s)-Y(s)\right|^2ds\middle|\mathscr{F}_0\right)$$

$$+16(1-\theta)^2 TK_1^2 E\left(\int_0^t \left|Y(s)-Z_1(s)\right|^2 ds \middle| \mathscr{F}_0\right)$$

由于$\sum_{i=0}^{k-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}}(s-t_i)ds+\int_{t_k}^{t}(s-t_k)ds=\frac{k}{2}\Delta^2+\frac{1}{2}\Delta^2\le\frac{1}{2}N\Delta^2=\frac{1}{2}T\Delta$.再利用引理3.3可得

$$4(1-\theta)^2 E\left(\sup_{0\le r\le t}\left|\int_0^r\left(f(s,X(s))-f(\tilde{s},Z_1(s))\right)ds\right|^2 \middle| \mathscr{F}_0\right)$$

$$\le 16TK_1^2\int_0^t E\left(\sup_{0\le r\le s}\left|X(r)-Y(r)\right|^2 \middle| \mathscr{F}_0\right)ds+4T^2K_1^2(4C_7+1)\Delta \tag{3-11}$$

类似地估计(3-10)右边的第二项可得

$$4\theta^2 E\left(\sup_{0\le r\le t}\left|\int_0^r\left(f(s,X(s))-f(\tilde{s},Z_2(s))\right)ds\right|^2 \middle| \mathscr{F}_0\right)$$

$$\le 16TK_1^2\int_0^t E\left(\sup_{0\le r\le s}\left|X(r)-Y(r)\right|^2 \middle| \mathscr{F}_0\right)ds+4T^2K_1^2(4C_8+1)\Delta \tag{3-12}$$

对(3-10)右边的第三项先利用B-D-G不等式得到

$$4E\left(\sup_{0\le r\le t}\left|\int_0^r\left(g(s,X(s))-g(\tilde{s},Z_2(s))\right)dW_s\right|^2 \middle| \mathscr{F}_0\right)$$

$$\le 16E\left(\int_0^t\left|g(s,X(s))-g(\tilde{s},Z_2(s))\right|^2 ds \middle| \mathscr{F}_0\right)$$

再利用假设3.1和引理3.3可得

$$4E\left(\sup_{0\le r\le t}\left|\int_0^r\left(g(s,X(s))-g(\tilde{s},Z_2(s))\right)dW_s\right|^2 \middle| \mathscr{F}_0\right)$$

$$\le 64K_1^2\int_0^t E\left(\sup_{0\le r\le s}\left|X(r)-Y(r)\right|^2 \middle| \mathscr{F}_0\right)ds+16TK_1^2(4C_8+1)\Delta \tag{3-13}$$

类似地估计(3-10)右边的第四项，有

$$4E\left(\sup_{0\le r\le t}\left|\int_0^r\left(h(s,X(s))-h(\tilde{s},Z_2(s))\right)dN_s\right|^2 \middle| \mathscr{F}_0\right)$$

$$\le 8E\left(\sup_{0\le r\le t}\left|\int_0^r\left(h(s,X(s))-h(\tilde{s},Z_2(s))\right)d\tilde{N}_s\right|^2 \middle| \mathscr{F}_0\right)$$

$$+8\lambda^2 E\left(\sup_{0\le r\le t}\left|\int_0^r\left(h(s,X(s))-h(\tilde{s},Z_2(s))\right)ds\right|^2 \middle| \mathscr{F}_0\right)$$

$$\le\left(32\lambda+8\lambda^2T\right)\int_0^t E\left(\left|h\left(s,X(s)\right)-h\left(\tilde{s},Z_2(s)\right)\right|^2\Big|\mathscr{F}_0\right)ds$$

$$\le 4K_1^2\left(32\lambda+8\lambda^2T\right)\int_0^t E\left(\sup_{0\le r\le s}\left|X(r)-Y(r)\right|^2\Big|\mathscr{F}_0\right)ds$$

$$+TK_1^2\Delta\left(4C_8+1\right)\left(32\lambda+8\lambda^2T\right) \tag{3-14}$$

将(3-11)-(3-14)代入(3-10)，整理得

$$E\left(\sup_{0\le r\le t}\left|X(r)-Y(r)\right|^2\big|\mathscr{F}_0\right)$$

$$\le\left[16TK_1^2+16TK_1^2+64K_1^2+4K_1^2\left(32\lambda+8\lambda^2T\right)\right]\int_0^t E\left(\sup_{0\le r\le s}\left|X(r)-Y(r)\right|^2\big|\mathscr{F}_0\right)ds$$

$$+4T^2K_1^2\left(4C_7+1\right)\Delta+4T^2K_1^2\left(4C_8+1\right)\Delta$$

$$+16TK_1^2\left(4C_8+1\right)\Delta+TK_1^2\left(4C_8+1\right)\Delta\left(32\lambda+8\lambda^2T\right)$$

运用 Growall 不等式，整理后得

$$E\left(\sup_{0\le r\le t}\left|X(r)-Y(r)\right|^2\big|\mathscr{F}_0\right)\le C\Delta,$$

其中

$$C=e^{\left[32TK_1^2+64K_1^2+4K_1^2\left(32\lambda+8\lambda^2T\right)\right]T}$$

$$\times\left\{4T^2K_1^2\left(4C_7+1\right)+4T^2K_1^2\left(4C_8+1\right)+16TK_1^2\left(4C_8+1\right)+TK_1^2\left(4C_8+1\right)\left(32\lambda+8\lambda^2T\right)\right\}.$$

下面用一个例子来比较欧拉算法和 $SS\theta$ 算法。取 $T=4,X_0=10,\lambda=20,\theta=0.9$.当方程(3-1)的系数分别为 $f(t,x)=2x,g(t,x)=\frac{1}{2}x,h(t,x)=-\frac{1}{10}x$ 时，方程(3-1)的解析解为

$$X(t)=10\left(\frac{9}{10}\right)^{N_t}\exp\left\{\frac{15}{8}t+\frac{1}{2}W_t\right\}.$$

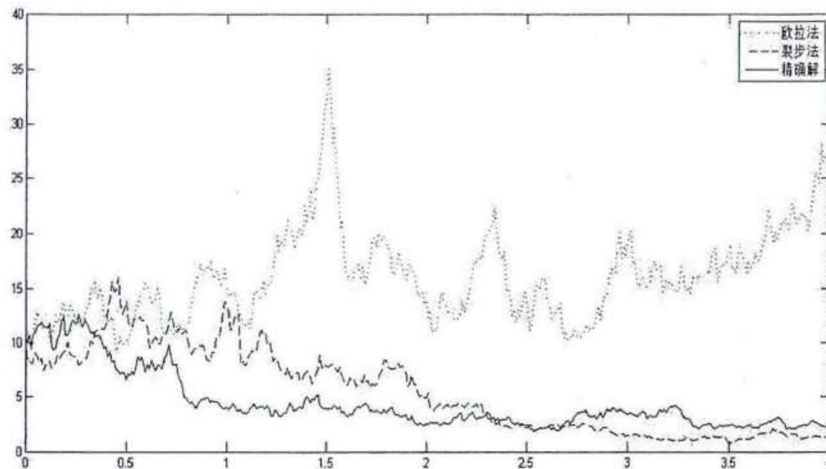


图 3.1 精确解、欧拉算法数值解和裂步法数值解

Fig. 3.1 Exact Solution, Solution of the Euler-Maruyama scheme and of the Split-step θ scheme

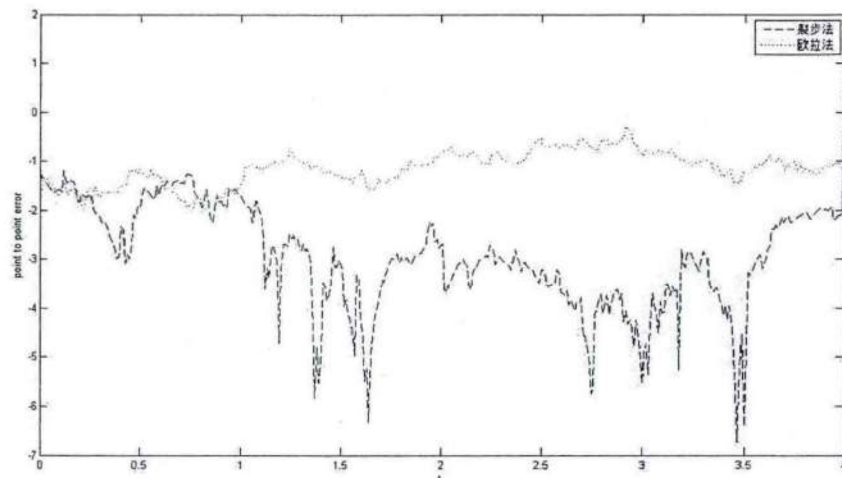


图 3.2 离散解与精确解之间取对数后的误差

Fig. 3.2 Point mean square errors of the Euler scheme and of the Split-step θ scheme in a logarithmic scale

图 3.1 给出 $\Delta = 0.01$的 Split-stepθ 算法的近似解和 Euler-Maruyama 算法近似解及精确解，其中近似解是 100 次计算后的均值。从图 3.1 可以看出 Split-stepθ 算法的数值更近似于精确解。图 3.2 显示的是 Split-stepθ 算法的近似解和 Euler-Maruyama 算法近似解与精确解之间的误差，其中误差是 100 次计算后，近似解和精确解差的平方的均值。由图 3.2 可知，Split-stepθ 算法的近似解与精确解之间的误差更小。此例说明 Split-stepθ 算法要优于 Euler-Maruyama 算法。

第4章　带跳的随机延迟微分方程$SS\theta$法近似解的收敛速率

本章在上章的基础上，在方程中引入时滞项，考虑如下带跳的随机延迟微分方程：

$$\begin{cases} dX(t)=f\left(t,X(t),X(t-\tau)\right)dt+g\left(t,X(t),X(t-\tau)\right)dW_t \\ \qquad +h\left(t,X(t^-),X\left((t-\tau)^-\right)\right)dN_t \quad t\in[0,T] \\ X(t)=\varphi(t) \qquad\qquad\qquad\qquad t\in[-\tau,0] \end{cases} \tag{4-1}$$

其中W_t为$\mathscr{F}_t$适应的一维布朗运动，N_t为参数为λ的一维泊松过程，且W_t与N_t相互独立。$X(t^-)=\lim_{s\uparrow t}X(s)$。对于所有的$t\geq 0,s\in[-\tau,0]$，$\varphi(t)\in C[-\tau,0]$，$\varphi(s)$与$W_t$和$N_t$相互独立，且$\sup_{-\tau\leq t\leq 0}E|\varphi(s)|^2<\infty$；$X(t)$为属于$C([0,T];R)$的随机变量，初值为$X(0)=\varphi(0)$，$\tau$为一固定的正时滞.假设方程的系数$f,g,h$为其所有变元的连续函数。

为了保证方程(4-1)存在唯一解，还需要引入如下假设

假设4.1　系数f,g,h关于t满足*Hölder*连续，关于变元x,y满足Lipschitz条件，即对于任意的$0\leq t_1\leq T,0\leq t_2\leq T$以及$x_1,x_2,y_1,y_2\in R$，存在正常数$K_1>0$，使得

$$|f(t_1,x_1,y_1)-f(t_2,x_2,y_2)|\vee|g(t_1,x_1,y_1)-g(t_2,x_2,y_2)|\vee|h(t_1,x_1,y_1)-h(t_2,x_2,y_2)|$$
$$\leq K_1\left(|t_1-t_2|^{\frac{1}{2}}+|x_1-x_2|+|y_1-y_2|\right) \tag{4-2}$$

假设 4.2　系数f,g,h均满足线性增长条件，即对任意的$t\in[0,T]$以及$x,y\in R$，存在正常数$K_2>0$，使得

$$|f(t,x,y)|^2\vee|g(t,x,y)|^2\vee|h(t,x,y)|^2\leq K_2(1+|x|^2+|y|^2) \tag{4-3}$$

假设4.3 (初值连续性) 对于任意的$s,t\in[-\tau,0]$，存在正常数β，使得$E|\varphi(s)-\varphi(t)|^2\leq\beta|s-t|$。

由文献[30]可知，方程(4-1)存在唯一解。

现在，本章将对带跳的非线性随机微分方程(4-1)建立$SS\theta$算法。取Δ为步长，满足$T=N\Delta$，$\tau=m\Delta$，其中N,m均为正整数.节点$t_k=k\Delta$，$k=-m,...,0,1,...,N$.当$k\leq 0$时，$Y_k=\varphi(k\Delta)$；而当$k\geq 0$时，

$$Y_k^* = Y_k + \theta\Delta f\left(t_k, Y_k^*, Y_{k-m}^*\right) + (1-\theta)\Delta f\left(t_k, Y_k, Y_{k-m}\right) \tag{4-4}$$

$$Y_{k+1} = Y_k^* + g\left(t_k, Y_k^*, Y_{k-m}^*\right)\Delta W_k + h\left(t_k, Y_k^*, Y_{k-m}^*\right)\Delta N_k \tag{4-5}$$

其中增量 $\Delta N_k \overset{\Delta}{=} N(t_{k+1}) - N(t_k)$，服从参数为 $\lambda\Delta$ 的泊松分布；增量 $\Delta W_k \overset{\Delta}{=} W(t_{k+1}) - W(t_k)$ 为相互独立的且服从 $N(0,\Delta)$ 的高斯随机变量。

对于上述离散化近似解 Y_k，构造时间连续的近似解。对任意的 $t \in [t_k, t_{k+1})$，定义

$$\begin{aligned} Y(t) &= Y_k + \theta(t-t_k) f\left(t_k, Y_k^*, Y_{k-m}^*\right) + (1-\theta)(t-t_k) f\left(t_k, Y_k, Y_{k-m}\right) \\ &\quad + g\left(t_k, Y_k^*, Y_{k-m}^*\right)\left(W_t - W_{t_k}\right) + h\left(t_k, Y_k^*, Y_{k-m}^*\right)\left(N_t - N_{t_k}\right) \end{aligned} \tag{4-6}$$

与第三章类似，将(4-4)和(4-5)逐次代入(4-6)，整理可得

$$\begin{aligned} Y(t) &= Y_0 + \theta(t-t_k) f\left(t_k, Y_k^*, Y_{k-m}^*\right) + (1-\theta)(t-t_k) f\left(t_k, Y_k, Y_{k-m}\right) \\ &\quad + g\left(t_k, Y_k^*, Y_{k-m}^*\right)\left(W_t - W_{t_k}\right) + h\left(t_k, Y_k^* Y_{k-m}^*\right)\left(N_t - N_{t_k}\right) + \theta\sum_{i=0}^{k-1} \Delta f\left(t_i, Y_i^*, Y_{i-m}^*\right) \\ &\quad + (1-\theta)\sum_{i=0}^{k-1} \Delta f\left(t_i, Y_i, Y_{i-m}\right) + \sum_{i=0}^{k-1} g\left(t_i, Y_i^*, Y_{i-m}^*\right)\Delta W_i + \sum_{i=0}^{k-1} h\left(t_i, Y_i^*, Y_{i-m}^*\right)\Delta N_i \end{aligned} \tag{4-7}$$

接着定义3个示性函数

$$Z_1(t) = \sum_{i=0}^{N-1} Y_i \chi_{[t_i, t_{i+1})}(t) + Y_N \chi_{\{t=T\}}(t),$$

$$Z_2(t) = \sum_{i=0}^{N-1} Y_i^* \chi_{[t_i, t_{i+1})}(t) + Y_N \chi_{\{t=T\}}(t),$$

$$\tilde{s} = \sum_{i=0}^{N-1} t_i \chi_{[t_i, t_{i+1})}(t).$$

其中 $\chi_F(t)$ 为示性函数，即当 $t \in F$ 时，$\chi_F(t) = 1$，否则 $\chi_F(t) = 0$。于是式(4-7)等价于

$$\begin{aligned} Y(t) &= Y_0 + \int_0^t (1-\theta) f\left(\tilde{s}, Z_1(s), Z_1(s-m\Delta)\right) ds + \int_0^t \theta f\left(\tilde{s}, Z_2(s), Z_2(s-m\Delta)\right) ds \\ &\quad + \int_0^t g\left(\tilde{s}, Z_2(s), Z_2(s-m\Delta)\right) dW_s + \int_0^t h\left(\tilde{s}, Z_2(s), Z_2(s-m\Delta)\right) dN_s \end{aligned} \tag{4-8}$$

4.1 近似解的估计

为了证明全局误差的收敛速率，本节将给出一些引理。首先对 $E\left(\left|Y_r^*\right|^2 \middle| \mathscr{F}_0\right)$ 和 $E\left(\left|Y_r\right|^2 \middle| \mathscr{F}_0\right)$ 作估计。

引理 4.1 设 $f:[0,T]\times R\to R$ 满足假设 4.1 和假设 4.2，Y_k 和 Y_k^* 都是依据 $SS\theta$ 算法得到的近似解，则对于任意的 $0<\theta\le 1$,，存在非负常数 C_1,C_2，当 $\Delta\le\min\left\{1,\frac{1}{8K_2}\right\}$ 时，有

$$\max_{0\le r\le k}E\left(\left|Y_r^*\right|^2|\mathscr{F}_0\right)\le C_1\max_{0\le r\le k}E\left(\left|Y_r\right|^2|\mathscr{F}_0\right)+C_2$$

证明：首先给定某个整数 $k\in[0,N]$，对于任意的非负整数 $r\in[0,k]$，运用引理 3.1 同样的证明方法，先对(4-4)式两边取平方，再利用基本不等式 $2ab\le a^2+b^2$ 和假设 4.2，得到

$$\begin{aligned}
\left|Y_r^*\right|^2 &\le(1+\Delta)\left|Y_r\right|^2+\left(\theta\Delta+\theta\Delta^2\right)K_2\left(1+\left|Y_r^*\right|^2+\left|Y_{r-m}^*\right|^2\right)\\
&+(1-\theta)\Delta(1+\Delta)K_2\left(1+\left|Y_r\right|^2+\left|Y_{r-m}\right|^2\right)\\
&\le(1+\Delta)\left(1+(1-\theta)\Delta K_2\right)\left|Y_r\right|^2+(1-\theta)\Delta(1+\Delta)K_2\left|Y_{r-m}\right|^2\\
&+(1+\Delta)\theta\Delta K_2\left(\left|Y_r^*\right|^2+\left|Y_{r-m}^*\right|^2\right)+\Delta(1+\Delta)K_2
\end{aligned}$$

上式的两边取条件期望得到

$$\begin{aligned}
E\left(\left|Y_r^*\right|^2|\mathscr{F}_0\right)&\le(1+\Delta)\left(1+(1-\theta)\Delta K_2\right)E\left(\left|Y_r\right|^2|\mathscr{F}_0\right)+(1+\Delta)(1-\theta)\Delta K_2E\left(\left|Y_{r-m}\right|^2|\mathscr{F}_0\right)\\
&+(1+\Delta)\theta\Delta K_2\left(E\left(\left|Y_r^*\right|^2|\mathscr{F}_0\right)+E\left(\left|Y_{r-m}^*\right|^2|\mathscr{F}_0\right)\right)+\Delta(1+\Delta)K_2\\
&\le(1+\Delta)\left(1+(1-\theta)\Delta K_2\right)\max_{0\le r\le k}E\left(\left|Y_r\right|^2|\mathscr{F}_0\right)+(1+\Delta)(1-\theta)\Delta K_2\max_{0\le r\le k}E\left(\left|Y_{r-m}\right|^2|\mathscr{F}_0\right)\\
&+(1+\Delta)\theta\Delta K_2\left(\max_{0\le r\le k}E\left(\left|Y_r^*\right|^2|\mathscr{F}_0\right)+\max_{0\le r\le k}E\left(\left|Y_{r-m}^*\right|^2|\mathscr{F}_0\right)\right)+\Delta(1+\Delta)K_2\\
&\le(1+\Delta)\left(1+(1-\theta)\Delta K_2\right)\max_{0\le r\le k}E\left(\left|Y_r\right|^2|\mathscr{F}_0\right)\\
&+(1+\Delta)(1-\theta)\Delta K_2\left(\max_{m\le r\le k}E\left(\left|Y_{r-m}\right|^2|\mathscr{F}_0\right)+E\|\varphi\|^2\right)\\
&+(1+\Delta)\theta\Delta K_2\left(\max_{0\le r\le k}E\left(\left|Y_r^*\right|^2|\mathscr{F}_0\right)+\max_{m\le r\le k}E\left(\left|Y_{r-m}^*\right|^2|\mathscr{F}_0\right)+E\|\varphi\|^2\right)+\Delta(1+\Delta)K_2\\
&\le(1+\Delta)\left(1+2(1-\theta)\Delta K_2\right)\max_{0\le r\le k}E\left(\left|Y_r\right|^2|\mathscr{F}_0\right)\\
&+2(1+\Delta)\theta\Delta K_2\max_{0\le r\le k}E\left(\left|Y_r^*\right|^2|\mathscr{F}_0\right)+\Delta(1+\Delta)K_2\left(1+E\|\varphi\|^2\right)
\end{aligned}$$

注意到上式的右边与 r 无关，于是有

$$\begin{aligned}
\max_{0\le r\le k}E\left(\left|Y_r^*\right|^2|\mathscr{F}_0\right)&\le(1+\Delta)\left(1+2(1-\theta)\Delta K_2\right)\max_{0\le r\le k}E\left(\left|Y_r\right|^2|\mathscr{F}_0\right)\\
&+4\theta\Delta K_2\max_{0\le r\le k}E\left(\left|Y_r^*\right|^2|\mathscr{F}_0\right)+\Delta(1+\Delta)K_2\left(1+E\|\varphi\|^2\right)
\end{aligned}$$

由于 $0<\theta\le 1$ 和 $\Delta\le\min\left\{1,\frac{1}{8K_2}\right\}$，所以 $4K_2\theta\Delta\le 4K_2\Delta\le\frac{1}{2}$，故移项整理后得

$$\max_{0\le r\le k} E\left(\left|Y_k^*\right|^2 \middle| \mathscr{F}_0\right) \le \frac{(1+\Delta)\left(1+2(1-\theta)\Delta K_2\right)}{1-4K_2\theta\Delta}\max_{0\le r\le k} E\left(\left|Y_k\right|^2 \middle| \mathscr{F}_0\right)+\frac{\Delta(1+\Delta)K_2}{1-4K_2\theta\Delta}\left(1+E\|\varphi\|^2\right)$$

$$\le C_1 \max_{0\le r\le k} E\left(\left|Y_k\right|^2 \middle| \mathscr{F}_0\right)+C_2$$

其中$C_1=4(1+2K_2), C_2=4K_2\left(1+E\|\varphi\|^2\right)$

引理 4.2 设$f:[0,T]\times R\to R$，$g:[0,T]\times R\to R$和$h:[0,T]\times R\to R$都满足假设 4.1 和假设 4.2，Y_k和Y_k^*都是依据$SS\theta$算法得到的近似解，则对于任意的$0<\theta\le 1$,存在非负常数C_3, C_4，使得当$\Delta\le\min\left\{1,\frac{1}{8K_2}\right\}$时，有

$$\max_{0\le r\le k} E\left(\left|Y_r\right|^2 \middle| \mathscr{F}_0\right)\le C_3, \max_{0\le r\le k} E\left(\left|Y_r^*\right|^2 \middle| \mathscr{F}_0\right)\le C_4.$$

证明：当$0\le k<N$时，由(4-6)式可知

$$\begin{aligned}
\left|Y_{k+1}\right|^2 =& \left|Y_k\right|^2+\left|\theta\Delta f\left(t_k,Y_k^*,Y_{k-m}^*\right)\right|^2+\left|(1-\theta)\Delta f\left(t_k,Y_k,Y_{k-m}\right)\right|^2+\left|g\left(t_k,Y_k^*,Y_{k-m}^*\right)\Delta W_k\right|^2\\
&+\left|h\left(t_k,Y_k^*,Y_{k-m}^*\right)\Delta N_k\right|^2+2Y_k h\left(t_k,Y_k^*,Y_{k-m}^*\right)\Delta N_k\\
&+2\theta\Delta f\left(t_k,Y_k^*,Y_{k-m}^*\right)Y_k+2(1-\theta)\Delta f\left(t_k,Y_k,Y_{k-m}\right)Y_k+2Y_k g\left(t_k,Y_k^*,Y_{k-m}^*\right)\Delta W_k\\
&+2(1-\theta)\theta\Delta^2 f\left(t_k,Y_k^*,Y_{k-m}^*\right)f\left(t_k,Y_k,Y_{k-m}\right)+2\theta\Delta f\left(t_k,Y_k^*,Y_{k-m}^*\right)g\left(t_k,Y_k^*,Y_{k-m}^*\right)\Delta W_k\\
&+2\theta\Delta f\left(t_k,Y_k^*,Y_{k-m}^*\right)h\left(t_k,Y_k^*,Y_{k-m}^*\right)\Delta N_k+2(1-\theta)\Delta f\left(t_k,Y_k,Y_{k-m}\right)g\left(t_k,Y_k^*,Y_{k-m}^*\right)\Delta W_k\\
&+2(1-\theta)\Delta f\left(t_k,Y_k,Y_{k-m}\right)h\left(t_k,Y_k^*,Y_{k-m}^*\right)\Delta N_k+2g\left(t_k,Y_k^*,Y_{k-m}^*\right)\Delta W_k h\left(t_k,Y_k^*,Y_{k-m}^*\right)\Delta N_k
\end{aligned}$$

利用$\Delta W_k, \Delta N_k$和$\mathscr{F}_k$的独立性，得到$E\left(\Delta W_k \middle| \mathscr{F}_k\right)=0, E\left(\Delta N_k \middle| \mathscr{F}_k\right)=\lambda\Delta$。注意到$f\left(t_k,Y_k,Y_{k-m}\right)\in\mathscr{F}_k, f\left(t_k,Y_k^*,Y_{k-m}^*\right)\in\mathscr{F}_k, g\left(t_k,Y_k^*,Y_{k-m}^*\right)\in\mathscr{F}_k, h\left(t_k,Y_k^*,Y_{k-m}^*\right)\in\mathscr{F}_k$,与引理 3.2 相类似，对上式两边取条件期望，运用基本不等式和假设 4.2，得到

$$\begin{aligned}
E\left(\left|Y_{k+1}\right|^2 \middle| \mathscr{F}_0\right) \le& (1+\Delta+\lambda\Delta)E\left(\left|Y_k\right|^2 \middle| \mathscr{F}_0\right)+\Delta K_2\left(1+E\left(\left|Y_k^*\right|^2 \middle| \mathscr{F}_0\right)+E\left(\left|Y_{k-m}^*\right|^2 \middle| \mathscr{F}_0\right)\right)\\
&+\left((1-\theta)\Delta+(1-\theta)\Delta^2+\lambda(1-\theta)\Delta^2\right)K_2\left(1+E\left(\left|Y_k\right|^2 \middle| \mathscr{F}_0\right)+E\left(\left|Y_{k-m}\right|^2 \middle| \mathscr{F}_0\right)\right)\\
&+\left(\theta\Delta+\theta\Delta^2+\lambda\theta\Delta^2\right)K_2\left(1+E\left(\left|Y_k^*\right|^2 \middle| \mathscr{F}_0\right)+E\left(\left|Y_{k-m}^*\right|^2 \middle| \mathscr{F}_0\right)\right)\\
&+\left(2\lambda\Delta+\lambda^2\Delta^2+\lambda\Delta^2\right)K_2\left(1+E\left(\left|Y_k^*\right|^2 \middle| \mathscr{F}_0\right)+E\left(\left|Y_{k-m}^*\right|^2 \middle| \mathscr{F}_0\right)\right)\\
\le& \left(1+\tilde{C}_1\Delta\right)E\left(\left|Y_k\right|^2 \middle| \mathscr{F}_0\right)+\tilde{C}_2\Delta\left(E\left(\left|Y_k^*\right|^2 \middle| \mathscr{F}_0\right)+E\left(\left|Y_{k-m}^*\right|^2 \middle| \mathscr{F}_0\right)\right)\\
&+\tilde{C}_3\Delta E\left(\left|Y_{k-m}\right|^2 \middle| \mathscr{F}_0\right)+\tilde{C}_2\Delta,
\end{aligned}$$

其中$\tilde{C}_1=(1+\lambda)+(2+\lambda)K_2,\tilde{C}_2=(3+4\lambda+\lambda^2)K_2,\tilde{C}_2=(2+\lambda)K_2$.

不等式的两边取期望。与引理4.1相类似，给定某个整数$k\in[0,N]$，对于任意的整数$r\in[0,k]$，有

$$\begin{aligned}E\left(|Y_{r+1}|^2|\mathscr{F}_0\right)&\le(1+\tilde{C}_1\Delta)\max_{0\le r\le k}E\left(|Y_r|^2|\mathscr{F}_0\right)+\tilde{C}_2\Delta\left(\max_{0\le r\le k}E\left(|Y_r^*|^2|\mathscr{F}_0\right)+\max_{0\le r\le k}E\left(|Y_{r-m}^*|^2|\mathscr{F}_0\right)\right)\\&\quad+\tilde{C}_3\Delta\max_{0\le r\le k}E\left(|Y_{r-m}|^2|\mathscr{F}_0\right)+\tilde{C}_2\Delta\\&\le(1+\tilde{C}_1\Delta+\tilde{C}_3\Delta)\max_{0\le r\le k}E\left(|Y_r|^2|\mathscr{F}_0\right)\\&\quad+\tilde{C}_2\Delta\left(\max_{0\le r\le k}E\left(|Y_r^*|^2|\mathscr{F}_0\right)+\max_{m\le r\le k}E\left(|Y_{r-m}^*|^2|\mathscr{F}_0\right)+E\|\varphi\|^2\right)\\&\quad+\tilde{C}_3\Delta\left(\max_{m\le r\le k}E\left(|Y_{r-m}|^2|\mathscr{F}_0\right)+E\|\varphi\|^2\right)+\tilde{C}_2\Delta\\&\le(1+\tilde{C}_1\Delta+\tilde{C}_3\Delta)\max_{0\le r\le k}E\left(|Y_r|^2|\mathscr{F}_0\right)+2\tilde{C}_2\Delta\max_{0\le r\le k}E\left(|Y_r^*|^2|\mathscr{F}_0\right)\\&\quad+(\tilde{C}_2+\tilde{C}_3)\Delta\left(1+E\|\varphi\|^2\right)\end{aligned}$$

利用引理4.1，可得

$$E\left(|Y_{r+1}|^2|\mathscr{F}_0\right)\le(1+C_5\Delta)\max_{0\le r\le k}E\left(|Y_r|^2|\mathscr{F}_0\right)+C_6\Delta \tag{4-9}$$

其中$C_5=\tilde{C}_1+2\tilde{C}_2C_1+\tilde{C}_3,C_6=(\tilde{C}_2+\tilde{C}_3)\left(1+E\|\varphi\|^2\right)+2\tilde{C}_2C_2$.

注意到上式的右边与r无关，且对于任意的$r\in[0,k]$成立，故有

$$\max_{0\le r\le k}E\left(|Y_{r+1}|^2|\mathscr{F}_0\right)\le(1+C_5\Delta)\max_{0\le r\le k}E\left(|Y_r|^2|\mathscr{F}_0\right)+C_6\Delta, \tag{4-10}$$

对(4-10)式进行逐次迭代，得出

$$\begin{aligned}\max_{0\le r\le k}E\left(|Y_{r+1}|^2|\mathscr{F}_0\right)&\le C_6\Delta\sum_{i=0}^{k}(1+C_5\Delta)^i+(1+C_5\Delta)^{k+1}E|Y_0|^2\\&\le\frac{C_6}{C_5}\left((1+C_5\Delta)^{k+1}-1\right)+(1+C_5\Delta)^{k+1}E\|\varphi\|^2\end{aligned}$$

用引理3.2相同的方法，得到

$$\max_{0\le r\le k}E\left(|Y_{r+1}|^2|\mathscr{F}_0\right)\le C_3,$$

其中$C_3=\frac{C_6}{C_5}\left(e^{C_5T}-1\right)+e^{C_5T}E|Y_0|^2$.

再利用引理4.1，便可得出$\max_{0\le r\le k}E\left(|Y_r^*|^2|\mathscr{F}_0\right)\le C_4$,其中$C_4=C_1C_3+C_2$。

引理4.3 设$f:[0,T]\times R\to R$，$g:[0,T]\times R\to R$和$h:[0,T]\times R\to R$都满足假设4.1和假设4.2，Y_k和Y_k^*都是依据$SS\theta$算法得到的近似解，则对于任意的$0<\theta\le1$,，存在非负

实数C_7, C_8，使得当$\Delta \le \min\left\{1, \frac{1}{8K_2}\right\}$时，有

$$E\left(\left|Y(t)-Z_1(t)\right|^2 \mid \mathscr{F}_0\right) \le C_7\Delta,$$
$$E\left(\left|Y(t)-Z_2(t)\right|^2 \mid \mathscr{F}_0\right) \le C_8\Delta.$$

证明：当$t \in [t_k, t_{k+1})$时，由(4-6)式可知

$$\begin{aligned}Y(t)-Z_1(t) &= \theta(t-t_k) f(t_k, Y_k^*, Y_{k-m}^*) + (1-\theta)(t-t_k) f(t_k, Y_k, Y_{k-m}) \\ &\quad + g(t_k, Y_k^*, Y_{k-m}^*)(W_t - W_{t_k}) + h(t_k, Y_k^*, Y_{k-m}^*)(N_t - N_{t_k})\end{aligned}$$

与引理 3.3 的证明方法相似。利用假设 4.2 和基本不等式$(a+b+c+d)^2 \le 4a^2+4b^2+4c^2+4d^2$，可得

$$\begin{aligned}E\left(\left|Y(t)-Z_1(t)\right|^2 \mid \mathscr{F}_0\right) &\le 4\theta^2\Delta^2 K_2\left(1+E\left(\left|Y_k^*\right|^2 \mid \mathscr{F}_0\right)+E\left(\left|Y_{k-m}^*\right|^2 \mid \mathscr{F}_0\right)\right) \\ &\quad +4(1-\theta)^2\Delta^2 K_2\left(1+E\left(\left|Y_k\right|^2 \mid \mathscr{F}_0\right)+E\left(\left|Y_{k-m}\right|^2 \mid \mathscr{F}_0\right)\right) \\ &\quad +4\Delta K_2\left(1+E\left(\left|Y_k^*\right|^2 \mid \mathscr{F}_0\right)+E\left(\left|Y_{k-m}^*\right|^2 \mid \mathscr{F}_0\right)\right) \\ &\quad +4\left(\lambda\Delta+\lambda^2\Delta^2\right)K_2\left(1+E\left(\left|Y_k^*\right|^2 \mid \mathscr{F}_0\right)+E\left(\left|Y_{k-m}^*\right|^2 \mid \mathscr{F}_0\right)\right) \\ &\le 4\Delta^2 K_2\left(E\left(\left|Y_k\right|^2 \mid \mathscr{F}_0\right)+\max_{m\le k\le N} E\left(\left|Y_{k-m}\right|^2 \mid \mathscr{F}_0\right)+E\|\varphi\|^2\right)+4\Delta^2 K_2 \\ &\quad +4\Delta^2 K_2+4\Delta K_2+4\left(\lambda\Delta+\lambda^2\Delta^2\right)K_2 \\ &\quad +\left(4\Delta^2 K_2+4\Delta K_2+4\left(\lambda\Delta+\lambda^2\Delta^2\right)K_2\right)\left(E\left(\left|Y_k^*\right|^2 \mid \mathscr{F}_0\right)+\max_{m\le k\le N} E\left(\left|Y_{k-m}^*\right|^2 \mid \mathscr{F}_0\right)+E\|\varphi\|^2\right)\end{aligned}$$

结合引理 4.2 的结论可得

$$E\left(\left|Y(t)-Z_1(t)\right|^2 \mid \mathscr{F}_0\right) \le C_7\Delta,$$

其中

$$C_7 = 4K_2\left(2C_3+E\|\varphi\|^2\right)+\left(4K_2+4K_2+4\left(\lambda+\lambda^2\right)K_2\right)\left(2C_4+E\|\varphi\|^2\right)+4K_2+4K_2+4K_2+4\left(\lambda+\lambda^2\right)K_2.$$

再根据(4-4)式，可知

$$Z_2(t)-Z_1(t) = \theta\Delta f(t_k, Y_k^*, Y_{k-m}^*) + (1-\theta)\Delta f(t_k, Y_k, Y_{k-m})$$

同样利用假设 4.2，基本不等式$(a+b)^2 \le 2a^2+2b^2$可得

$$E\left(\left|Z_2(t)-Z_1(t)\right|^2\middle|\mathscr{F}_0\right)=E\left(\left|\theta\Delta f\left(t_k,Y_k^*,Y_{k-m}^*\right)+(1-\theta)\Delta f\left(t_k,Y_k,Y_{k-m}\right)\right|^2\middle|\mathscr{F}_0\right)$$
$$\le 2\theta^2\Delta^2 E\left(\left|f\left(t_k,Y_k^*,Y_{k-m}^*\right)\right|^2\middle|\mathscr{F}_0\right)+2(1-\theta)^2\Delta^2 E\left(\left|f\left(t_k,Y_k,Y_{k-m}\right)\right|^2\middle|\mathscr{F}_0\right)$$
$$\le 2\theta^2\Delta^2 K_2\left(1+E\left(\left|Y_k^*\right|^2\middle|\mathscr{F}_0\right)+E\left(\left|Y_{k-m}^*\right|^2\middle|\mathscr{F}_0\right)\right)$$
$$+2(1-\theta)^2\Delta^2 K_2\left(1+E\left(\left|Y_k\right|^2\middle|\mathscr{F}_0\right)+E\left(\left|Y_{k-m}\right|^2\middle|\mathscr{F}_0\right)\right)$$
$$\le 2\Delta^2 K_2\left(1+E\left(\left|Y_k^*\right|^2\middle|\mathscr{F}_0\right)+\max_{m\le k\le N}E\left(\left|Y_{k-m}^*\right|^2\middle|\mathscr{F}_0\right)+E\|\varphi\|^2\right)$$
$$+2\Delta^2 K_2\left(1+E\left(\left|Y_k\right|^2\middle|\mathscr{F}_0\right)+\max_{m\le k\le N}E\left(\left|Y_{k-m}\right|^2\middle|\mathscr{F}_0\right)+E\|\varphi\|^2\right)$$

运用引理 4.2 可得

$$E\left(\left|Z_2(t)-Z_1(t)\right|^2\middle|\mathscr{F}_0\right)\le C_{11}\Delta,$$

其中 $C_{11}=2K_2\left(1+2C_4+E\|\varphi\|^2\right)+2K_2\left(1+2C_3+E\|\varphi\|^2\right)$. 于是

$$E\left(\left|Y(t)-Z_2(t)\right|^2\middle|\mathscr{F}_0\right)\le 2E\left(\left|Y(t)-Z_2(t)\right|^2\middle|\mathscr{F}_0\right)+2E\left(\left|Z_2(t)-Z_1(t)\right|^2\middle|\mathscr{F}_0\right)$$
$$\le 2C_7\Delta+2C_{11}\Delta$$
$$\le C_8\Delta,$$

这里 $C_8=2C_7+2C_{11}$.

4.2 收敛速率

本节讨论 $SS\theta$ 算法的收敛性。

定理 4.1 在假设 4.1，假设 4.2 和假设 4.3 下，存在一个非负实数 C，使得方程(4-1)的解 $X(t)$ 和方程(4-8)给出的连续时间近似解 $Y(t)$ 满足不等式

$$E\left(\sup_{-\tau\le t\le T}\left|X(t)-Y(t)\right|^2\middle|\mathscr{F}_0\right)\le C\Delta.$$

证明：证明方法与定理 3.1 相似。首先由方程(4-1) 和方程(4-8)可知

$$X(t)-Y(t)=(1-\theta)\int_0^t\Big(f\big(s,X(s),X(s-m\Delta)\big)-f\big(\tilde{s},Z_1(s),Z_1(s-m\Delta)\big)\Big)ds$$
$$+\theta\int_0^t\Big(f\big(s,X(s),X(s-m\Delta)\big)-f\big(\tilde{s},Z_2(s),Z_2(s-m\Delta)\big)\Big)ds$$
$$+\int_0^t\Big(g\big(s,X(s),X(s-m\Delta)\big)-g\big(\tilde{s},Z_2(s),Z_2(s-m\Delta)\big)\Big)dW_s$$
$$+\int_0^t\Big(h\big(s,X(s),X(s-m\Delta)\big)-h\big(\tilde{s},Z_2(s),Z_2(s-m\Delta)\big)\Big)dN_s$$

两边同时平方后先取上确界，再取条件期望，可得

$$
\begin{aligned}
&E\left(\sup_{0\le r\le t}\left|X(r)-Y(r)\right|^2\middle|\mathscr{F}_0\right)\le \\
&\quad 4(1-\theta)^2E\left(\sup_{0\le r\le t}\left|\int_0^r\left(f\left(s,X(s),X(s-m\Delta)\right)-f\left(\tilde{s},Z_1(s),Z_1(s-m\Delta)\right)\right)ds\right|^2\middle|\mathscr{F}_0\right) \\
&\quad +4\theta^2E\left(\sup_{0\le r\le t}\left|\int_0^r\left(f\left(s,X(s),X(s-m\Delta)\right)-f\left(\tilde{s},Z_2(s),Z_2(s-m\Delta)\right)\right)ds\right|^2\middle|\mathscr{F}_0\right) \\
&\quad +4E\left(\sup_{0\le r\le t}\left|\int_0^r\left(g\left(s,X(s),X(s-m\Delta)\right)-g\left(\tilde{s},Z_2(s),Z_2(s-m\Delta)\right)\right)dW_s\right|^2\middle|\mathscr{F}_0\right) \\
&\quad +4E\left(\sup_{0\le r\le t}\left|\int_0^r\left(h\left(s,X(s),X(s-m\Delta)\right)-h\left(\tilde{s},Z_2(s),Z_2(s-m\Delta)\right)\right)dN_s\right|^2\middle|\mathscr{F}_0\right)
\end{aligned}
\tag{4-11}
$$

接下来，依次对(4-11)式右边的四项分别做估计。

对于$t\in[t_k,t_{k+1})$，根据*Hölder*不等式，假设4.1可知

$$
\begin{aligned}
&4(1-\theta)^2E\left(\sup_{0\le r\le t}\left|\int_0^r\left(f\left(s,X(s),X(s-m\Delta)\right)-f\left(\tilde{s},Z_1(s),Z_1(s-m\Delta)\right)\right)ds\right|^2\middle|\mathscr{F}_0\right) \\
&\le 4(1-\theta)^2T\int_0^tE\left(\left|f\left(s,X(s),X(s-m\Delta)\right)-f\left(\tilde{s},Z_1(s),Z_1(s-m\Delta)\right)\right|^2\middle|\mathscr{F}_0\right)ds \\
&\le 12K_1^2T\int_0^t\left|s-\tilde{s}\right|ds+12K_1^2TE\left(\int_0^t\left|X(s)-Z_1(s)\right|^2ds\middle|\mathscr{F}_0\right) \\
&+12K_1^2TE\left(\int_0^t\left|X(s-m\Delta)-Z_1(s-m\Delta)\right|^2ds\middle|\mathscr{F}_0\right)
\end{aligned}
$$

由于$\int_0^t\left|s-\tilde{s}\right|ds=\sum_{i=0}^{k-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}}(s-t_i)ds+\int_{t_k}^t(s-t_k)ds\le\frac{1}{2}T\Delta$.再由引理4.3和假设4.3可得

$$
\begin{aligned}
&4(1-\theta)^2E\left(\sup_{0\le r\le t}\left|\int_0^r\left(f\left(s,X(s),X(s-m\Delta)\right)-f\left(\tilde{s},Z_1(s),Z_3(s-m\Delta)\right)\right)ds\right|^2\middle|\mathscr{F}_0\right) \\
&\le 6K_1^2T^2\Delta+12K_1^2TE\left(\int_0^t\left|X(s)-Z_1(s)\right|^2ds\middle|\mathscr{F}_0\right) \\
&+12K_1^2TE\left(\int_{-m\Delta}^{t-m\Delta}\left|X(u)-Z_1(u)\right|^2du\middle|\mathscr{F}_0\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\le 6K_1^2T^2\Delta+12K_1^2TE\left(\int_0^t\left|X(s)-Z_1(s)\right|^2ds\middle|\mathscr{F}_0\right)\\
&+12K_1^2TE\left(\int_0^{t-m\Delta}\left|X(u)-Z_1(u)\right|^2du\middle|\mathscr{F}_0\right)\\
&+12K_1^2TE\left(\int_{-m\Delta}^0\left|X(u)-Z_1(u)\right|^2du\middle|\mathscr{F}_0\right)\\
&\le 6K_1^2T^2\Delta+24K_1^2TE\left(\int_0^t\left|X(s)-Z_1(s)\right|^2ds\middle|\mathscr{F}_0\right)\\
&+12K_1^2T\beta\tau\Delta\\
&\le 6K_1^2T^2\Delta+48K_1^2TE\left(\int_0^t\left|X(s)-Y(s)\right|^2ds\middle|\mathscr{F}_0\right)\\
&+12K_1^2T\beta\tau\Delta+48K_1^2TE\left(\int_0^t\left|Y(s)-Z_1(s)\right|^2ds\middle|\mathscr{F}_0\right)\\
&\le 6K_1^2T^2\Delta+48K_1^2T\left(\int_0^tE\left(\sup_{0\le r\le s}\left|X(r)-Y(r)\right|^2\middle|\mathscr{F}_0\right)ds\right)+12K_1^2T\beta\tau\Delta+48K_1^2TC_7\Delta
\end{aligned}
\tag{4-12}
$$

类似地估计(4-11)的右边第二项可得

$$
\begin{aligned}
&4\theta^2E\left(\sup_{0\le r\le t}\left|\int_0^r\left(f\left(s,X(s),X(s-m\Delta)\right)-f\left(\tilde{s},Z_2(s),Z_2(s-m\Delta)\right)\right)ds\right|^2\middle|\mathscr{F}_0\right)\\
&\le 6K_1^2T^2\Delta+48K_1^2T\left(\int_0^tE\left(\sup_{0\le r\le s}\left|X(r)-Y(r)\right|^2\middle|\mathscr{F}_0\right)ds\right)\\
&+12K_1^2T\beta\tau\Delta+48K_1^2TC_8\Delta
\end{aligned}
\tag{4-13}
$$

对于(4-11)的右边第三项利用 B-D-G 不等式得出

$$
\begin{aligned}
&4E\left(\sup_{0\le r\le t}\left|\int_0^r\left(g\left(s,X(s),X(s-m\Delta)\right)-g\left(\tilde{s},Z_2(s),Z_2(s-m\Delta)\right)\right)dW_s\right|^2\middle|\mathscr{F}_0\right)\\
&\le 16\int_0^tE\left(\left|g\left(s,X(s),X(s-m\Delta)\right)-g\left(\tilde{s},Z_2(s),Z_2(s-m\Delta)\right)\right|^2\middle|\mathscr{F}_0\right)ds
\end{aligned}
$$

再利用假设 4.1 和引理 4.3 可得

$$
4E\left(\sup_{0\le r\le t}\left|\int_0^r\left(g\left(s,X(s),X(s-m\Delta)\right)-g\left(\tilde{s},Z_2(s),Z_4(s-m\Delta)\right)\right)dW_s\right|^2\middle|\mathscr{F}_0\right)
$$

$$\le 24TK_1^2\Delta+192K_1^2\int_0^t E\left(\sup_{0\le r\le s}\left|X(r)-Y(r)\right|^2|\mathscr{F}_0\right)ds$$

$$+48K_1^2\beta\tau\Delta+192K_1^2C_8\Delta \tag{4-14}$$

类似地可得

$$4E\left(\sup_{0\le r\le t}\left|\int_0^r\left(h\left(s,X(s),X(s-m\Delta)\right)-h\left(\tilde{s},Z_2(s),Z_2(s-m\Delta)\right)\right)dN_s\right|^2|\mathscr{F}_0\right)$$

$$\le 8E\left(\sup_{0\le r\le t}\left|\int_0^r\left(h\left(s,X(s),X(s-m\Delta)\right)-h\left(\tilde{s},Z_2(s),Z_2(s-m\Delta)\right)\right)d\tilde{N}_s\right|^2|\mathscr{F}_0\right)$$

$$+8\lambda^2E\left(\sup_{0\le r\le t}\left|\int_0^r\left(h\left(s,X(s),X(s-m\Delta)\right)-h\left(\tilde{s},Z_2(s),Z_2(s-m\Delta)\right)\right)ds\right|^2|\mathscr{F}_0\right)$$

$$\le\left(32\lambda+8\lambda^2T\right)\int_0^t E\left(\left|h\left(s,X(s),X(s-m\Delta)\right)-h\left(\tilde{s},Z_2(s),Z_2(s-m\Delta)\right)\right|^2|\mathscr{F}_0\right)ds$$

$$\le\frac{3}{2}TK_1^2\Delta\left(32\lambda+8\lambda^2T\right)+12K_1^2\left(32\lambda+8\lambda^2T\right)\int_0^t E\left(\sup_{0\le r\le s}\left|X(r)-Y(r)\right|^2|\mathscr{F}_0\right)ds$$

$$+12K_1^2C_8\Delta\left(32\lambda+8\lambda^2T\right)+3\beta\tau K_1^2\Delta\left(32\lambda+8\lambda^2T\right) \tag{4-15}$$

将(4-12)-(4-15)代入(4-11)，整理得

$$E\left(\sup_{0\le r\le t}\left|X(r)-Y(r)\right|^2|\mathscr{F}_0\right)\le\tilde{C}_1\int_0^t E\left(\sup_{0\le r\le s}\left|X(r)-Y(r)\right|^2|\mathscr{F}_0\right)ds+\tilde{C}_2\Delta$$

其中$\tilde{C}_1=96TK_1^2+192K_1^2+12K_1^2\left(32\lambda+8\lambda^2T\right)$,

$$\tilde{C}_2=12T^2K_1^2+24TK_1^2+\frac{3}{2}TK_1^2\left(32\lambda+8\lambda^2T\right)+24K_1^2T\beta\tau+48K_1^2\beta\tau+3K_1^2\beta\tau\left(32\lambda+8\lambda^2T\right)$$
$$+48K_1^2TC_7+48K_1^2TC_8+192K_1^2C_8+12K_1^2C_8\left(32\lambda+8\lambda^2T\right).$$

运用 Growall 不等式，整理后得

$$E\left(\sup_{0\le r\le t}\left|X(r)-Y(r)\right|^2|\mathscr{F}_0\right)\le\tilde{C}\Delta,$$

其中$\tilde{C}=\tilde{C}_2e^{\tilde{C}_1}$.

由于 $\sup_{-\tau\le r\le t}\left|X(r)-Y(r)\right|^2=\sup_{-\tau\le r\le 0}\left|X(r)-Y(r)\right|^2\vee\sup_{0\le r\le t}\left|X(r)-Y(r)\right|^2$，运用假设 4.3 得

$$E\left(\sup_{-\tau\le r\le t}\left|X(r)-Y(r)\right|^2\middle|\mathscr{F}_0\right)\le E\left(\sup_{0\le r\le t}\left|X(r)-Y(r)\right|^2\middle|\mathscr{F}_0\right)+E\left(\sup_{-\tau\le r\le 0}\left|X(r)-Y(r)\right|^2\right)$$

$$\le\tilde{C}\Delta+E\left|\varphi(t)-\varphi\left(\left[\frac{t}{\Delta}\right]\Delta\right)\right|^2$$

$$\le C\Delta,$$

其中$C=\tilde{C}+\beta$。

例 4.1 讨论下列带跳的随机延迟微分方程

$$\begin{cases}dX(t)=\left[aX(t)+bX(t-1)\right]dt+cX(t-1)dW(t)+DX(t)dN(t),t\ge 0\\ X(t)=t+1,t\in[-1,0]\end{cases}\tag{4-16}$$

对式(4-16)的系数取$a=-9,b=7,c=1,D=0.2,\lambda=1,\theta=0.9$. 精确解是根据[38]的方法得到的，即取步长 1/1024 的 Euler-Maruyama 算法的近似解作为精确解，图 4.1 给出 Split-step θ 算法的近似解和 Euler-Maruyama 算法近似解，从图 4.1 可以看出 Split-step θ 算法的数值更近似于精确解. 图 4.2 显示的是 Split-step θ 算法的近似解和 Euler-Maruyama 算法近似解与精确解之间的误差，由图 4.2 可知，Split-step θ 算法的近似解与精确解之间的误差更小。此例说明 Split-step θ 算法要优于 Euler-Maruyama 算法。

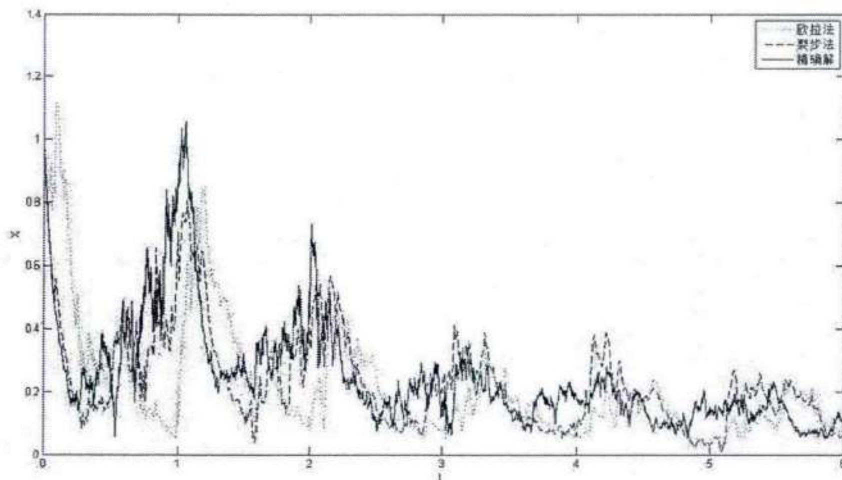


图 4.1 $\Delta=0.01$ 时 Split-step 算法、Euler-Maruyama 算法和精确解模拟结果

Fig. 4.1 Exact Solution, Solution of the Euler-Maruyama scheme and of the Split-step θ scheme with $\Delta=0.01$

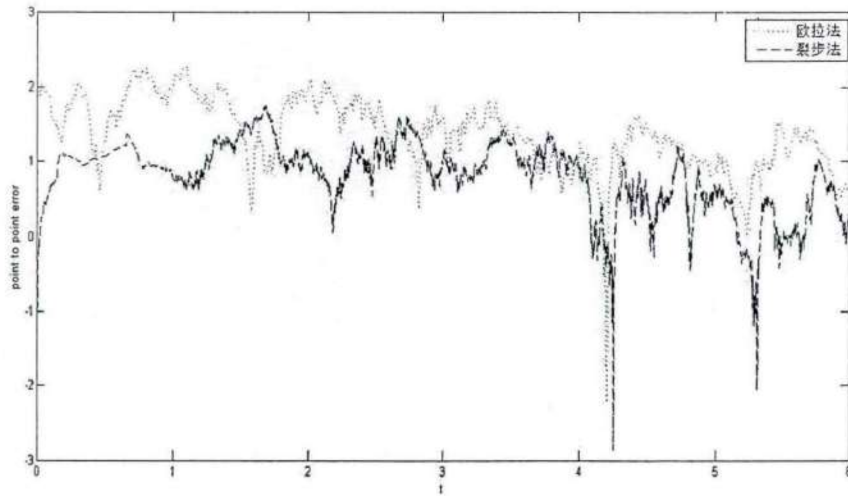


图 4.2 离散解与精确解之间的取对数后的误差

Fig. 4.2 Point mean square errors of the Euler scheme and of the Split-step θ scheme in a logarithmic scale

第5章 带跳的随机微分方程裂步法一阶近似解的收敛速率

本章考虑带跳的随机微分方程如下

$$\begin{cases} dX(t)=f(t,X(t))dt+g(t,X(t))dW_t+h(t,X(t^-))dN_t \\ X(0)=\varphi(0) \end{cases} \tag{5-1}$$

其中W_t为$\mathscr{F}_t$适应的一维布朗运动，N_t为参数为λt的一维泊松过程，且W_t与N_t相互独立。$X(t^-)=\lim_{s\uparrow t}X(s)$。对于任意的$t\geq 0$，$\varphi(0)$与$W_t$和$N_t$相互独立，且$E|\varphi(0)|^2<\infty$；$X(t)$为属于$C([0,T];R)$的随机变量。假设方程的函数$f,g,h$为其所有变元的连续函数，关于第一个变元存在一阶连续偏导数，关于第二个变元存在二阶连续偏导数。

现在给出本章的假设条件：

假设 5.1 系数f,g,h关于第一个变元具有一阶连续偏导数有界，关于第二个变元的一阶偏导数存在且连续有界，gg'_x,gh'_x满足 Lipschitz 条件。

假设 5.2 系数f,g,h均满足线性增长条件，即对所有的$0\leq t\leq T$以及$x\in R$，存在正常数$K_2>0$，使得$|f(t,x)|^2\vee|g(t,x)|^2\vee|h(t,x)|^2\leq K_2(1+|x|^2)$.系数$f,g,h$关于第一个变元的一阶连续偏导数满足线性增长条件，$g^2f''_{xx}$满足线性增长条件。

由文献[25]可知，在假设 5.1 和假设 5.2 下方程(5-1)存在唯一解.

在第三章中我们给出了方程(5-1)的一个收敛速率为$\frac{1}{2}$的$SS\theta$算法，与第三章不同，本章我们将通过$It\hat{o}-Taylor$展开式构造一个收敛速率为 1 的 Split-step 算法。

5.1 基于$It\hat{o}-Taylor$展开的 Split-step 算法

首先给出半鞅$It\hat{o}$公式。假设$l(t,X(t))$关于t一阶连续且关于x二阶连续，运用半鞅$It\hat{o}$公式(见文献[3])知：

$$l(t,X(t))=l(0,X(0))+\int_0^t L_0l(s,X(s))ds+\int_0^t L_1l(s,X(s))dW_s+\int_0^t L_{-1}l(s,X(s))dN_s \tag{5-2}$$

其中

$$L_0l(s,x)=\frac{\partial l(t,x)}{\partial t}+f(t,x)\frac{\partial l(t,x)}{\partial x}+\frac{1}{2}g^2(t,x)\frac{\partial^2 l(t,x)}{\partial x^2}$$

$$=l_t'(t,x)+f(t,x)l_x'(t,x)+\frac{1}{2}g^2(t,x)l_{xx}''(t,x) \tag{5-3}$$

$$L_1 l(s,x)=g(t,x)\frac{\partial l(t,x)}{\partial x}=g(t,x)l_x'(t,x) \tag{5-4}$$

$$L_{-1}l(s,x)=l(t,x+h(t,x))-l(t,x) \tag{5-5}$$

在给出$It\hat{o}-Taylor$展开式之前，我们需要引入一些定义和符号。由于在$It\hat{o}-Taylor$展开式中涉及关于时间t的积分，关于维纳过程W_t的积分和关于泊松过程的积分，为了叙述简便起见，本章将分别用0,1,−1来表示上述不同意义的积分。由于在推导过程中，一般都会将泊松过程转化为补偿泊松过程，所以我们用$-\tilde{1}$来表示补偿泊松过程的积分。又由于$It\hat{o}-Taylor$展开式中含有多重积分，因此我们需要引入多维指标。定义一个行向量$\alpha=(j_1,j_2,...,j_J)$，其中$j_i\in\{-\tilde{1},-1,0,1\}$，$1\le i\le J, J\in N$，称这个行向量为多维指标$\alpha$。这个多维指标的长度$J_\alpha\in\{1,2,3,......\}$。例如，$J_{(0)}=1, J_{(1,0)}=2$。为了使这个定义更为完整，用$v$表示长度为0的指标，即$J_v=0$，这意味着不对函数进行任何积分。另外，分别用$p_\alpha$，$n_\alpha$和$w_\alpha$表示多维指标$\alpha$中$-1$，$0$，$1$的个数。例如

$p_{(0)}=0, n_{(0)}=1, w_{(0)}=0, p_{(1,0)}=0, n_{(1,0)}=1, w_{(1,0)}=1, p_{(1,-1)}=1, n_{(1,-1)}=0, w_{(1,-1)}=1.$

将所有多维指标的集合定义为

$$\mu=\{v\}\cup\{\alpha=(j_1,j_2,...,j_J):j_i\in\{-\tilde{1},-1,0,1\},1\le i\le J,J\in N\} \tag{5-6}$$

我们定义一个不含有$-\tilde{1}$多维指标集合，即

$$\hat{\mu}=\{\alpha\in\mu:j_i\in\{-1,0,1\},1\le i\le J,J\in N\} \tag{5-7}$$

非空集合$\mathrm{A}\in\hat{\mu}$的补集为$\beta(\mathrm{A})=\hat{\mu}-\mathrm{A}$。

给定$\alpha\in\hat{\mu}, J_\alpha\ge1$，对于$\hat{\mu}$上的元素，用$\to\alpha$，$\alpha\leftarrow$分别表示删除多维指标的第一个元素或最后一个元素，例如

$$\to\alpha=\to(j_1,j_2,...,j_J)=(j_2,...,j_J) \tag{5-8}$$

$$\alpha\leftarrow=(j_1,j_2,...,j_J)\leftarrow=(j_1,...,j_{J-1}) \tag{5-9}$$

又例如，若$\alpha=(1,-1)$，则$\to\alpha=\to(1,-1)=(-1), \alpha\leftarrow=(1,-1)\leftarrow=(1)$.

最后，对于$\hat{\mu}$上的任意两个多维指标$\alpha=(j_1,j_2,...,j_J)$和$\beta=(i_1,i_2,...,i_k)$，定义算子$\wedge$的运算为

$\alpha\wedge\beta=(j_1,j_2,...,j_J)\wedge(i_1,i_2,...,i_k)=(j_1,j_2,...,j_J,i_1,i_2,...,i_k)$。

例如，对于$\alpha=(1,-1)$和$\beta=(1,0)$，有$\alpha\wedge\beta=(1,-1)\wedge(1,0)=(1,-1,1,0)$。

下面给出$It\hat{o}-Taylor$展开式。

在假设 5.1 和假设 5.2 下，方程(5-1)的解$X(t)$可写为如下等价的积分方程形式

$$X(t)=X(0)+\int f(s,X(s))ds+\int g(s,X(s))dW_s+\int h(s,X(s^-))dN_s \tag{5-10}$$

令$l:[0,T]\times R\to R$，为一个连续可微的函数。当$l(t,x)=x$时，运用半鞅$It\hat{o}$公式，得$L_0x=f,L_1x=g,L_{-1}x=h$则由(5-2)式得到的即为(5-10)式。

令$l=f,l=g,l=h$，应用(5-2)式得到最简单的$It\hat{o}-Taylor$展开式，即

$$\begin{aligned}X(t)=X(0)&+\int_0^t\left(f(0,X(0))+\int_0^s L_0f(r,X(r))dr+\int_0^s L_1f(r,X(r))dW_r+\int_0^s L_{-1}f(r,X(r))dN_r\right)ds\\&+\int_0^t\left(g(0,X(0))+\int_0^s L_0g(r,X(r))dr+\int_0^s L_1g(r,X(r))dW_r+\int_0^s L_{-1}g(r,X(r))dN_r\right)dW_s\\&+\int_0^t\left(h(0,X(0))+\int_0^s L_0h(r,X(r))dr+\int_0^s L_1h(r,X(r))dW_r+\int_0^s L_{-1}h(r,X(r))dN_r\right)dN_s\end{aligned}$$

$$=X(0)+f(0,X(0))\int ds+g(0,X(0))\int dW_s+h(0,X(0))\int dN_s+\overline{R} \tag{5-11}$$

余项

$$\begin{aligned}\overline{R}=&\int_0\int_0 L_0f(r,X(r))drds+\int_0\int_0 L_1f(r,X(r))dW_rds+\int_0\int_0 L_{-1}f(r,X(r))dN_rds\\&+\int_0\int_0 L_0g(r,X(r))drdW_s+\int_0\int_0 L_1g(r,X(r))dW_rdW_s+\int_0\int_0 L_{-1}g(r,X(r))dN_rdW_s\\&+\int_0\int_0 L_0h(r,X(r))drdN_s+\int_0\int_0 L_1h(r,X(r))dW_rdN_s+\int_0\int_0 L_{-1}h(r,X(r))dN_rdN_s\end{aligned}$$

对上式继续使用半鞅$It\hat{o}$公式，依此类推下去，得到更高阶的$It\hat{o}-Taylor$展开式。

根据文献[40]，对上面的多重随机积分，可递归的定义

$$I_\alpha[x]_\rho^\varsigma=\begin{cases} x_\varsigma & :J_\alpha=0 \quad (5-12)\\ \int_\rho^\varsigma I_{\alpha\leftarrow}[x]_\rho^t\,dt & :J_\alpha>0,j_J=0 \quad (5-13)\\ \int_\rho^\varsigma I_{\alpha\leftarrow}[x]_\rho^t\,dW_t & :J_\alpha>0,j_J=1 \quad (5-14)\\ \int_\rho^\varsigma I_{\alpha\leftarrow}[x]_\rho^t\,dN_t & :J_\alpha>0,j_J=-1 \quad (5-15)\\ \int_\rho^\varsigma I_{\alpha\leftarrow}[x]_\rho^t\,d\tilde{N}_t & :J_\alpha>0,j_J=-\tilde{1} \quad (5-16)\end{cases}$$

其中$\alpha\in\mu,0\le\rho\le\varsigma\le T$，$\tilde{N}_t=N_t-\lambda t$为补偿泊松过程。

对于$\alpha\in\hat{\mu}$，定义函数$l_\alpha:R^+\times R\to R$如下：

$$l_\alpha(t,x)=\begin{cases} x & :\alpha=v \quad (5-17)\\ L_{j_1}l_{\to\alpha}(t,x) & :\alpha\in\hat{\mu}\setminus\{v\} \quad (5-18)\end{cases}$$

这里算子L用式(5-3)-(5-5)来定义.

将(5-12)-(5-16)和(5-17)-(5-18)代入(5-11)可以得出

$$X(t)=X(0)+\sum_{\alpha\in A\setminus\{v\}}I_\alpha\left[l_\alpha(0,X(0))\right]_0^t+\sum_{\alpha\in\beta(A)}I_\alpha\left[l_\alpha(\cdot,X)\right]_0^t \tag{5-19}$$

其中$\hat{\mu}=\{\alpha\in\mu:j_i\in\{-1,0,1\},1\le i\le J,0\le J\le M\}$, (5-20)

其中M为正整数。A为某个非空集合，$\beta(A)=\hat{\mu}-A$，称(5-19)为$It\hat{o}-Taylor$展开式。

为了建立一阶近似解，将时间等间距分割，取Δ为步长，满足$T=N\Delta$，其中N均为正整数.节点$t_k=k\Delta$，$k=0,1,\dots,N$.根据文献[6]、[40]知方程(5-1)的精确解$X(t)$的$It\hat{o}-Taylor$展开式为

$$\begin{aligned}X(t)=X(0)&+\sum_{\alpha\in A\setminus\{v\}}\left(\sum_{i=0}^{k-1}I_\alpha\left[l_\alpha(t_i,X_i)\right]_{t_i}^{t_{i+1}}+I_\alpha\left[l_\alpha(t_k,X_k)\right]_{t_k}^t\right)\\&+\sum_{\alpha\in\beta(A)}\left(\sum_{i=0}^{k-1}I_\alpha\left[l_\alpha(\cdot,X)\right]_{t_k}^{t_{k+1}}+I_\alpha\left[l_\alpha(\cdot,X)\right]_{t_k}^t\right)\end{aligned} \tag{5-21}$$

其中$A\in\hat{\mu}$且非空，$\beta(A)=\hat{\mu}-A$。

当$M=1$时，(5-20)式为$\hat{\mu}=\{v\}\cup\{(-1),(0),(1)\}$，可以建立Split-step算法：

$$Y_k^* = I_{\{v\}}\left[l_{\{v\}}\left(t_k,Y_k\right)\right]_{t_k}^{t_{k+1}} + I_{(0)}\left[l_{(0)}\left(t_k,Y_k\right)\right]_{t_k}^{t_{k+1}} \tag{5-22}$$

$$Y_{k+1} = Y_k^* + I_{(1)}\left[l_{(1)}\left(t_k,Y_k^*\right)\right]_{t_k}^{t_{k+1}} + I_{(-1)}\left[l_{(-1)}\left(t_k,Y_k^*\right)\right]_{t_k}^{t_{k+1}} \tag{5-23}$$

利用(5-5) 、(5-12) 、(5-13)、(5-17)、(5-18)可得

$$I_{\{v\}}\left[l_{\{v\}}\left(t_k,Y_k\right)\right]_{t_k}^{t_{k+1}} = I_{\{v\}}\left[Y_k\right]_{t_k}^{t_{k+1}} = Y_k,$$

$$I_{(0)}\left[l_{(0)}\left(t_k,Y_k\right)\right]_{t_k}^{t_{k+1}} = \int_{t_k}^{t_{k+1}} f\left(t_k,Y_k\right)dt = \Delta f\left(t_k,Y_k\right),$$

$$I_{(1)}\left[l_{(1)}\left(t_k,Y_k^*\right)\right]_{t_k}^{t_{k+1}} = \int_{t_k}^{t_{k+1}} g\left(t_k,Y_k^*\right)dW_t = g\left(t_k,Y_k^*\right)\Delta W_k,$$

$$I_{(-1)}\left[l_{(-1)}\left(t_k,Y_k^*\right)\right]_{t_k}^{t_{k+1}} = \int_{t_k}^{t_{k+1}} h\left(t_k,Y_k^*\right)dN_t = h\left(t_k,Y_k^*\right)\Delta N_k.$$

于是(5-22)和(5-23)等价于

$$Y_k^* = Y_k + \Delta f\left(t_k,Y_k\right), \tag{5-24}$$

$$Y_{k+1} = Y_k^* + g\left(t_k,Y_k^*\right)\Delta W_k + h\left(t_k,Y_k^*\right)\Delta N_k. \tag{5-25}$$

即为裘[31]讨论的 Split-step 算法，其收敛速率为$\frac{1}{2}$。

当取(5-20)式中的$M=2$时，

$\hat{\mu}=\{v\}\cup\{(-1),(0),(1),(0,0),(0,1),(0,-1),(1,1),(1,0),(1,-1),(-1,-1),(-1,0),(-1,1)\}$，建立本章所要讨论的基于$It\hat{o}-Taylor$展开的 Split-step 算法：

$$Y_k^* = Y_k + \sum_{\alpha\in A_1\setminus\{v\}} I_\alpha\left[l_\alpha\left(t_k,Y_k\right)\right]_{t_k}^{t_{k+1}} \tag{5-26}$$

$$Y_{k+1} = Y_k^* + \sum_{\alpha\in A_2} I_\alpha\left[l_\alpha\left(t_k,Y_k^*\right)\right]_{t_k}^{t_{k+1}} + \sum_{\alpha\in\beta(A_3)} I_\alpha\left[l_\alpha\left(t_k,Y_k^*\right)\right]_{t_k}^{t_{k+1}} \tag{5-27}$$

取 $A_1=\{v,(0)\}$，$A_2=\{(1),(-1)\}$，$\beta(A_3)=\{(1,1),(1,-1),(-1,1),(-1,-1)\}$，依据(5-3)-(5-5)、(5-12)-(5-16)和(5-17)-(5-18)可得

$$I_{(1)}\left[l_{(1)}\left(t_k,Y_k^*\right)\right]_{t_k}^{t_{k+1}} = \int_{t_k}^{t_{k+1}} g\left(t_k,Y_k^*\right)dW_t = g\left(t_k,Y_k^*\right)\Delta W_k,$$

$$I_{(-1)}\left[l_{(-1)}\left(t_k,Y_k^*\right)\right]_{t_k}^{t_{k+1}} = \int_{t_k}^{t_{k+1}} h\left(t_k,Y_k^*\right)dN_t = h\left(t_k,Y_k^*\right)\Delta N_k,$$

$$I_{(1,1)}\left[l_{(1,1)}\left(t_k,Y_k^*\right)\right]_{t_k}^{t_{k+1}} = \int_{t_k}^{t_{k+1}}\int_{t_k}^{t} g\left(t_k,Y_k^*\right)g_x'\left(t_k,Y_k^*\right)dW_s dW_t = g\left(t_k,Y_k^*\right)g_x'\left(t_k,Y_k^*\right)\left(\frac{1}{2}\left(\Delta W_k\right)^2-\frac{1}{2}\Delta\right),$$

$$I_{(1,-1)}\left[l_{(1,-1)}\left(t_k,Y_k^*\right)\right]_{t_k}^{t_{k+1}}=\int_{t_k}^{t_{k+1}}\int_{t_k}^{t}g\left(t_k,Y_k^*\right)h_x'\left(t_k,Y_k^*\right)dW_s dN_t=g\left(t_k,Y_k^*\right)h_x'\left(t_k,Y_k^*\right)\sum_{i=N_{t_k}}^{N_{t_{k+1}}}\left(W_{\Gamma(i)}-W_{t_k}\right),$$

$$I_{(-1,1)}\left[l_{(-1,1)}\left(t_k,Y_k^*\right)\right]_{t_k}^{t_{k+1}}=\int_{t_k}^{t_{k+1}}\int_{t_k}^{t}\left(g\left(t_k,Y_k^*+h\left(t_k,Y_k^*\right)\right)-g\left(t_k,Y_k^*\right)\right)dN_s dW_t$$

$$=\left(g\left(t_k,Y_k^*+h\left(t_k,Y_k^*\right)\right)-g\left(t_k,Y_k^*\right)\right)\left(\Delta N_k\Delta W_k-\sum_{i=N_{t_k}}^{N_{t_{k+1}}}\left(W_{\Gamma(i)}-W_{t_k}\right)\right),$$

$$I_{(-1,-1)}\left[l_{(-1,-1)}\left(t_k,Y_k^*\right)\right]_{t_k}^{t_{k+1}}=\int_{t_k}^{t_{k+1}}\int_{t_k}^{t}\left(h\left(t_k,Y_k^*+h\left(t_k,Y_k^*\right)\right)-h\left(t_k,Y_k^*\right)\right)dN_s dN_t$$

$$=\left(h\left(t_k,Y_k^*+h\left(t_k,Y_k^*\right)\right)-h\left(t_k,Y_k^*\right)\right)\left(\frac{1}{2}\left(\Delta N_k\right)^2-\frac{1}{2}\Delta N_k\right),$$

这里$\Gamma(i)$代表第i次泊松跳的时刻。于是(5-26)和(5-27)等价于

$$Y_k^*=Y_k+f\left(t_k,Y_k\right)\Delta, \tag{5-28}$$

$$\begin{aligned}Y_{k+1}=&Y_k^*+g\left(t_k,Y_k^*\right)\Delta W_k+h\left(t_k,Y_k^*\right)\Delta N_k+\frac{1}{2}g\left(t_k,Y_k^*\right)g_x'\left(t_k,Y_k^*\right)\left(\left(\Delta W_k\right)^2-\Delta\right)\\&+g\left(t_k,Y_k^*\right)h_x'\left(t_k,Y_k^*\right)\times I_{(1,-1)}[1]_{t_k}^{t_{k+1}}+\left(g\left(t_k,Y_k^*+h\left(t_k,Y_k^*\right)\right)-g\left(t_k,Y_k^*\right)\right)\times I_{(-1,1)}[1]_{t_k}^{t_{k+1}}\\&+\frac{1}{2}\left(h\left(t_k,Y_k^*+h\left(t_k,Y_k^*\right)\right)-h\left(t_k,Y_k^*\right)\right)\left(\left(\Delta N_k\right)^2-\Delta N_k\right).\end{aligned} \tag{5-29}$$

将(5-28)带入(5-29)得

$$\begin{aligned}Y_{k+1}=&Y_k+f\left(t_k,Y_k\right)\Delta+g\left(t_k,Y_k^*\right)\Delta W_k+h\left(t_k,Y_k^*\right)\Delta N_k+\frac{1}{2}g\left(t_k,Y_k^*\right)g_x'\left(t_k,Y_k^*\right)\left(\left(\Delta W_k\right)^2-\Delta\right)\\&+g\left(t_k,Y_k^*\right)h_x'\left(t_k,Y_k^*\right)\times I_{(1,-1)}[1]_{t_k}^{t_{k+1}}+\left(g\left(t_k,Y_k^*+h\left(t_k,Y_k^*\right)\right)-g\left(t_k,Y_k^*\right)\right)\times I_{(-1,1)}[1]_{t_k}^{t_{k+1}}\\&+\frac{1}{2}\left(h\left(t_k,Y_k^*+h\left(t_k,Y_k^*\right)\right)-h\left(t_k,Y_k^*\right)\right)\left(\left(\Delta N_k\right)^2-\Delta N_k\right)\\=&Y_k+\sum_{\alpha\in A_1\setminus\{v\}}I_\alpha\left[l_\alpha\left(t_k,Y_k\right)\right]_{t_k}^{t_{k+1}}+\sum_{\alpha\in A_2}I_\alpha\left[l_\alpha\left(t_k,Y_k^*\right)\right]_{t_k}^{t_{k+1}}+\sum_{\alpha\in\beta(A_3)}I_\alpha\left[l_\alpha\left(t_k,Y_k^*\right)\right]_{t_k}^{t_{k+1}}\end{aligned} \tag{5-30}$$

为了定理证明更为简便，令$A=A_1\cup A_2=\{v\}\cup\{(0),(1),(-1)\}$，补集$\beta(A)=\hat{\mu}\setminus A$，即$\beta(A)=\{(1,1),(1,-1),(-1,1),(-1,-1),(0,0),(0,1),(0,-1),(1,0),(-1,0)\}$。且$\beta(A)=\beta(A_3)\cup\beta(A_4)$，故$\beta(A_4)=\{(0,0),(0,1),(0,-1),(1,0),(-1,0)\}$。

注. 当$\alpha\in A=\{v\}\cup\{(0),(1),(-1)\}$时，$l_\alpha$分别等于$x,f,g,h$，由假设5.1可知$l_\alpha$满足lipschitz 条件；当$\alpha\in\beta(A_3)=\{(1,1),(1,-1),(-1,1),(-1,-1)\}$时，$l_\alpha$分别等于$gg_x',gh_x',g(t,x+h)-g(t,x),h(t,x+h)-h(t,x)$，依据假设5.1知，$g_x',h_x'$有界，$g,h$满足lipschitz 条件，所以$gg_x',gh_x'$分别满足 lipschitz 条件，随后依据假设 5.2 可知，当

$\alpha\in A\cup\beta(A_3)$时，$l_\alpha$满足线性增长条件；$\alpha\in\beta(A_4)=\{(0,0),(0,1),(0,-1),(1,0),(-1,0)\}$时，$l_\alpha$ 分别等于 $f_t'+ff_x'+\frac{1}{2}g^2f_{xx}'',g_t'+fg_x'+\frac{1}{2}g^2g_{xx}'',h_t'+fh_x'+\frac{1}{2}g^2h_{xx}'',gf_x'$，$f(t,x+h)-f(t,x)$，由于$gg_{xx}''=(gg_x')_x'-(g_x')^2,gh_{xx}''=(gh_x')_x'-g_x'h_x'$，依据假设 5.1 可知 gg_{xx}'',gh_{xx}''有界，再根据假设 5.2 知l_α满足线性增长条件。

5.2 Split-step 算法的收敛速率

本节我们将证明 Split-step 算法(5-28)和(5-29)的近似解收敛于方程(5-1)的精确解，并给出收敛速率。为了叙述简便起见，我们引入时间连续的近似解，当$t\in[t_k,t_{k+1})$时，定义

$$
\begin{aligned}
Y(t)=&I_{\{v\}}\left[l_{\{v\}}(t_k,Y_k)\right]_{t_k}^t+I_{(0)}\left[l_{(0)}(t_k,Y_k)\right]_{t_k}^t+I_{(1)}\left[l_{(1)}(t_k,Y_k^*)\right]_{t_k}^t\\
&+I_{(-1)}\left[l_{(-1)}(t_k,Y_k^*)\right]_{t_k}^t+I_{(1,1)}\left[l_{(1,1)}(t_k,Y_k^*)\right]_{t_k}^t+I_{(1,-1)}\left[l_{(1,-1)}(t_k,Y_k^*)\right]_{t_k}^t\\
&+I_{(-1,1)}\left[l_{(-1,1)}(t_k,Y_k^*)\right]_{t_k}^t+I_{(-1,-1)}\left[l_{(-1,-1)}(t_k,Y_k^*)\right]_{t_k}^t\\
=&I_{\{v\}}[1]_{t_k}^t\times l_{\{v\}}(t_k,Y_k)+I_{(0)}[1]_{t_k}^t\times l_{(0)}(t_k,Y_k)+I_{(1)}[1]_{t_k}^t\times l_{(1)}(t_k,Y_k^*)\\
&+I_{(-1)}[1]_{t_k}^t\times l_{(-1)}(t_k,Y_k^*)+I_{(1,1)}[1]_{t_k}^t\times l_{(1,1)}(t_k,Y_k^*)+I_{(1,-1)}[1]_{t_k}^t\times l_{(1,-1)}(t_k,Y_k^*)\\
&+I_{(-1,1)}[1]_{t_k}^t\times l_{(-1,1)}(t_k,Y_k^*)+I_{(-1,-1)}[1]_{t_k}^t\times l_{(-1,-1)}(t_k,Y_k^*)\\
=&Y_k+\sum_{\alpha\in A_1\setminus\{v\}}I_\alpha\left[l_\alpha(t_k,Y_k)\right]_{t_k}^t+\sum_{\alpha\in A_2}I_\alpha\left[l_\alpha(t_k,Y_k^*)\right]_{t_k}^t+\sum_{\alpha\in\beta(A_3)}I_\alpha\left[l_\alpha(t_k,Y_k^*)\right]_{t_k}^t\\
=&Y_k+\int_{t_k}^t f(t_k,Y_k)ds+\int_{t_k}^t g(t_k,Y_k^*)dW_s+\int_{t_k}^t\int_{t_k}^s g(t_k,Y_k^*)g_x'(t_k,Y_k^*)dW_rdW_s\\
&+\int_{t_k}^t\int_{t_k}^s g(t_k,Y_k^*)h_x'(t_k,Y_k^*)dW_rdN_s\\
&+\int_{t_k}^t\int_{t_k}^s\left(g\left(t_k,Y_k^*+h(t_k,Y_k^*)\right)-g(t_k,Y_k^*)\right)dN_rdW_s\\
&+\int_{t_k}^t h(t_k,Y_k^*)dN_s+\int_{t_k}^t\int_{t_k}^s\left(h\left(t_k,Y_k^*+h(t_k,Y_k^*)\right)-h(t_k,Y_k^*)\right)dN_rdN_s
\end{aligned}
\tag{5-31}
$$

将(5-30)式逐次代入(5-31)式，可得

$$
\begin{aligned}
Y(t)=&Y_0+\sum_{\alpha\in A_1\setminus\{v\}}\left(\sum_{i=0}^{k-1}I_\alpha\left[l_\alpha(t_i,Y_i)\right]_{t_i}^{t_{i+1}}+I_\alpha\left[l_\alpha(t_k,Y_k)\right]_{t_k}^t\right)+\sum_{\alpha\in A_2}\left(\sum_{i=0}^{k-1}I_\alpha\left[l_\alpha(t_i,Y_i^*)\right]_{t_i}^{t_{i+1}}+I_\alpha\left[l_\alpha(t_k,Y_k^*)\right]_{t_k}^t\right)\\
&+\sum_{\alpha\in\beta(A_3)}I_\alpha\left[\sum_{i=0}^{k-1}I_\alpha\left[l_\alpha(t_i,Y_i^*)\right]_{t_i}^{t_{i+1}}+I_\alpha\left[l_\alpha(t_k,Y_k^*)\right]_{t_k}^t\right]_{t_i}^{t_{i+1}}
\end{aligned}
\tag{5-32}
$$

其中 $A_1=\{v,(0)\}$, $A_2=\{(1),(-1)\}$， $\beta(A_3)=\{(1,1),(1,-1),(-1,1),(-1,-1)\}$。

显然 $Y(t_k)=Y_k$。为了证明近似解 $Y(t)$ 收敛于方程(5-1)的精确解 $X(t)$，我们需要一些引理:

引理 5.1[25]令 $\alpha\neq v$，对于 $i\le J_\alpha, j_i\in\{-1,0\}$，$k_1,...,k_{p_\alpha}$ 表示 -1 在多维指标中的位置，$\tilde{\alpha}_i=(j_1,...,j_{k_i-1},-\tilde{1},0,...,0)$，$\alpha_i^0=(j_1,...,j_{k_i-1},0,...,0)$ 和元素个数为 J 的 $\overline{0}_J=(0,...,0)$。则 $I_\alpha[x]_\rho^\varsigma$ 可分解成积分和的形式，即

$$I_\alpha[x]_\rho^\varsigma=\sum_{i=0}^{p_\alpha-1}\lambda^i I_{\tilde{\alpha}_{p_\alpha-i}}[x]_\rho^\varsigma+\lambda^{p_\alpha}I_{\overline{0}_{J_\alpha}}[x]_\rho^\varsigma.$$

引理 5.2[25]在假设 5.2 下，对于方程(5-1)的解 X，存在非负常数 C_1，使得

$$E\left(\sup_{t\in[0,T]}\left|X(t)\right|^2\right)\le C_2\left(1+E\left\|X(0)\right\|^2\right).$$

引理 5.3[25]令

$$G_{\rho,\varsigma}^\alpha=E\left(\sup_{t\in[\rho,\varsigma]}\left|I_\alpha[x]_{\rho^+}^t\right|^2\middle|\mathscr{F}_\rho\right),$$

对于 $\alpha\in\hat{\mu}\backslash\{v\}$，即 $\alpha\in\{(j_1,j_2,...,j_J):j_i\in\{-1,0,1\},1\le i\le J,J\in N\}$。$\varsigma$ 是 $\mathscr{F}_\rho$ 可测的，对于任意的 $t_0\le\rho\le\varsigma\le T$，$\varsigma-\rho\le\Delta<1$，存在常数 $\hat{\lambda}=\frac{1}{2}\lambda(4+\lambda)$，使得

$$G_{\rho,\varsigma}^\alpha\le 4^{w_\alpha+p_\alpha}\hat{\lambda}^{p_\alpha}\Delta^{J_\alpha+n_\alpha-1}\int_\rho^\varsigma G_{\rho,t}^v dt.$$

引理 5.4[25]令

$$F_t^\alpha=E\left(\sup_{s\in[0,t]}\left\|\sum_{n=0}^{k_s-1}I_\alpha[x]_{t_k}^{t_{k+1}}+I_\alpha[x]_{t_{k_s}}^s\right\|\mathscr{F}_0\right),$$

对于 $\alpha\in\hat{\mu}\backslash\{v\}$，即 $\alpha\in\{(j_1,j_2,...,j_J):j_i\in\{-1,0,1\},1\le i\le J,J\in N\}$，$G_{0,t}^v<\infty$, 分割 $(t)^\Delta=\{t_k:0=t_0\le t_1\le\cdots\le T,k\in\mathrm{N},\sup_{k\in N}(t_k-t_{k-1})\le\Delta\}$，且 $k_T=\max\{k\in\mathrm{N}:t_k\le T\}$.对于固定的 α，存在有限正常数 $C_2(\alpha)$，使得

$$\forall_{t\in[0,T]}F_t^\alpha\le\begin{cases}t\Delta^{2(l_\alpha-1)}\int_0^t G_{0,s}^v ds & :w_\alpha=p_\alpha=0\\ C_2(\alpha)\Delta^{l_\alpha+n_\alpha-1}\int_0^t G_{0,s}^v ds & :w_\alpha+p_\alpha>0\end{cases}$$

其中$G_{0,t}^{\alpha}=E\left(\sup\limits_{s\in[0,t]}\left|I_{\alpha}[x]_{0^+}^{s}\right|^2\Big|\mathscr{F}_0\right)$.

引理 5.5 在假设 5.1 和假设 5.2 下，$0\le t\le T$，近似解$Y(t)$满足下面的不等式

$$E\left(\sup_{0\le t\le T}\left|Y(t)\right|^2\Big|\mathscr{F}_0\right)\le C_3(\alpha)。$$

证明：根据(5-32)可得

$$\begin{aligned}E\left(\sup_{0\le s\le t}\left|Y(s)\right|^2\Big|\mathscr{F}_0\right)=E\Bigg(\sup_{0\le s\le t}\Bigg|Y_0&+\sum_{\alpha\in A_1\setminus\{v\}}\left(\sum_{i=0}^{k-1}I_{\alpha}\left[l_{\alpha}(t_i,Y_i)\right]_{t_i}^{t_{i+1}}+I_{\alpha}\left[l_{\alpha}(t_k,Y_k)\right]_{t_k}^{s}\right)\\&+\sum_{\alpha\in A_2}\left(\sum_{i=0}^{k-1}I_{\alpha}\left[l_{\alpha}(t_i,Y_i^*)\right]_{t_i}^{t_{i+1}}+I_{\alpha}\left[l_{\alpha}(t_k,Y_k^*)\right]_{t_k}^{s}\right)\\&+\sum_{\alpha\in\beta(A_3)}\left(\sum_{i=0}^{k-1}I_{\alpha}\left[l_{\alpha}(t_i,Y_i^*)\right]_{t_i}^{t_{i+1}}+I_{\alpha}\left[l_{\alpha}(t_k,Y_k^*)\right]_{t_k}^{s}\right)\Bigg|^2\Bigg|\mathscr{F}_0\Bigg)\end{aligned}$$

依据基本不等式可得

$$\begin{aligned}E\left(\sup_{0\le s\le t}\left|Y(s)\right|^2\Big|\mathscr{F}_0\right)\le D_1\Bigg(E\left|Y_0\right|^2&+\sum_{\alpha\in A_1\setminus\{v\}}E\left(\sup_{0\le s\le t}\left|\sum_{i=0}^{k-1}I_{\alpha}\left[l_{\alpha}(t_i,Y_i)\right]_{t_i}^{t_{i+1}}+I_{\alpha}\left[l_{\alpha}(t_k,Y_k)\right]_{t_k}^{s}\right|^2\Bigg|\mathscr{F}_0\right)\\&+\sum_{\alpha\in A_2\cup\beta(A_3)}E\left(\sup_{0\le s\le t}\left|\sum_{i=0}^{k-1}I_{\alpha}\left[l_{\alpha}(t_i,Y_i^*)\right]_{t_i}^{t_{i+1}}+I_{\alpha}\left[l_{\alpha}(t_k,Y_k^*)\right]_{t_k}^{s}\right|^2\Bigg|\mathscr{F}_0\right)\Bigg)\end{aligned}$$

应用引理 5.3 的结论，得到

$$\begin{aligned}E\left(\sup_{0\le s\le t}\left|Y(s)\right|^2\Big|\mathscr{F}_0\right)\le D_1\Bigg(E\left|Y_0\right|^2&+\sum_{\alpha\in A_1\setminus\{v\}}D_2(\alpha)\int_0^t E\left(\sup_{0\le r\le s}\left|l_{\alpha}\left(t_{\left[\frac{r}{\Delta}\right]},Y_{\left[\frac{r}{\Delta}\right]}\right)\right|^2\Bigg|\mathscr{F}_0\right)ds\\&+\sum_{\alpha\in A_2\cup\beta(A_3)}D_3(\alpha)\int_0^t E\left(\sup_{0\le r\le s}\left|l_{\alpha}\left(t_{\left[\frac{r}{\Delta}\right]},Y^*_{\left[\frac{r}{\Delta}\right]}\right)\right|^2\Bigg|\mathscr{F}_0\right)ds\Bigg)\end{aligned}$$

其中$\left[\frac{r}{\Delta}\right]$为取不大于$\frac{r}{\Delta}$的最大整数。再利用已知条件推出

$$E\left(\sup_{0\le s\le t}\left|Y(s)\right|^2\Big|\mathscr{F}_0\right)\le D_1\Bigg(E\left|Y_0\right|^2+\sum_{\alpha\in A_1\setminus\{v\}}D_2(\alpha)K_4^2(\alpha)\int_0^t E\left(1+\sup_{0\le r\le s}\left|Y_{\left[\frac{r}{\Delta}\right]}\right|^2\Bigg|\mathscr{F}_0\right)ds$$

$$+\sum_{\alpha\in A_2\cup\beta(A_3)} D_3(\alpha)K_4^2(\alpha)\int_0^t E\left(1+\sup_{0\le r\le s}\left|Y^*_{\left[\frac{r}{\Delta}\right]}\right|^2\middle|\mathscr{F}_0\right)ds \tag{5-33}$$

对于$E\left(\sup_{0\le r\le s}\left|Y^*_{\left[\frac{r}{\Delta}\right]}\right|^2\middle|\mathscr{F}_0\right)$，依据(5-28)式，可得

$$\begin{aligned}
E\left(\sup_{0\le r\le s}\left|Y^*_{\left[\frac{r}{\Delta}\right]}\right|^2\middle|\mathscr{F}_0\right) &= E\left(\sup_{0\le r\le s}\left|Y_{\left[\frac{r}{\Delta}\right]}+f\left(t_{\left[\frac{r}{\Delta}\right]},Y_{\left[\frac{r}{\Delta}\right]}\right)\Delta\right|^2\middle|\mathscr{F}_0\right)\\
&\le 2E\left(\sup_{0\le r\le s}\left|Y_{\left[\frac{r}{\Delta}\right]}\right|^2\middle|\mathscr{F}_0\right)+2E\left(\sup_{0\le r\le s}\left|f\left(t_{\left[\frac{r}{\Delta}\right]},Y_{\left[\frac{r}{\Delta}\right]}\right)\Delta\right|^2\middle|\mathscr{F}_0\right)\\
&\le 2E\left(\sup_{0\le r\le s}\left|Y_{\left[\frac{r}{\Delta}\right]}\right|^2\middle|\mathscr{F}_0\right)+2\Delta^2K_2^2\left(1+E\left(\sup_{0\le r\le s}\left|Y_{\left[\frac{r}{\Delta}\right]}\right|^2\middle|\mathscr{F}_0\right)\right)\\
&= 2\Delta^2K_2^2+2\left(1+\Delta^2K_2^2\right)E\left(\sup_{0\le r\le s}\left|Y_{\left[\frac{r}{\Delta}\right]}\right|^2\middle|\mathscr{F}_0\right)
\end{aligned} \tag{5-34}$$

将(5-34)代入(5-33)，得出

$$\begin{aligned}
E\left(\sup_{0\le s\le t}|Y(s)|^2|\mathscr{F}_0\right) &\le D_1\left(E|Y_0|^2+\sum_{\alpha\in A_1\setminus\{v\}}D_2(\alpha)K_4^2(\alpha)\int_0^t E\left(1+\left(\sup_{0\le r\le s}\left|Y_{\left[\frac{r}{\Delta}\right]}\right|^2\middle|\mathscr{F}_0\right)\right)ds\right.\\
&\quad\left.+\sum_{\alpha\in A_2\cup\beta(A_3)}D_3(\alpha)K_4^2(\alpha)\int_0^t E\left(2\left(1+\Delta^2K_2^2\right)\left(1+\left(\sup_{0\le r\le s}\left|Y_{\left[\frac{r}{\Delta}\right]}\right|^2\middle|\mathscr{F}_0\right)\right)\right)ds\right)\\
&\le D_1E|Y_0|^2+\left(\sum_{\alpha\in A_1\setminus\{v\}}D_2(\alpha)K_4^2(\alpha)+\sum_{\alpha\in A_2\cup\beta(A_3)}2D_3(\alpha)K_4^2(\alpha)\left(1+\Delta^2K_2^2\right)\right)\int_0^t E\left(1+\left(\sup_{0\le r\le s}\left|Y_{\left[\frac{r}{\Delta}\right]}\right|^2\middle|\mathscr{F}_0\right)\right)ds\\
&\le D_1E|Y_0|^2+D_4(\alpha)\int_0^t E\left(1+\left(\sup_{0\le r\le s}\left|Y_{\left[\frac{r}{\Delta}\right]}\right|^2\middle|\mathscr{F}_0\right)\right)ds\\
&\le D_1E|Y_0|^2+D_4(\alpha)T+D_4(\alpha)\int_0^t E\left(\sup_{0\le r\le s}|Y(r)|^2|\mathscr{F}_0\right)ds
\end{aligned}$$

接着，应用 Gronwall 不等式，就可得到

$$\begin{aligned}
E\left(\sup_{0\le s\le t}|Y(s)|^2|\mathscr{F}_0\right) &\le D_1E|Y_0|^2+D_4(\alpha)T+D_4(\alpha)\int_0^t e^{D_4(\alpha)s}\left(D_1E|Y_0|^2+D_4(\alpha)\right)ds\\
&\le \left(D_1E|Y_0|^2+D_4(\alpha)T\right)e^{D_4(\alpha)T}
\end{aligned}$$

$$=C_3(\alpha)$$

定理 5.1 在假设 5.1 和假设 5.2 下，对于方程(5-1)的解 $X(t)$ 和近似解 $Y(t)$，存在非负常数 C，使得

$$E\left(\sup_{t\in[0,T]}\left|X(t)-Y(t)\right|^2\Big|\mathscr{F}_0\right)\leq C\cdot\Delta^2.$$

证明：根据(5-32)和(5-21)可得

$$\begin{aligned}
\left|X(t)-Y(t)\right|^2=\Bigg|&X(0)+\sum_{\alpha\in\mathrm{A}\setminus\{v\}}\left(\sum_{i=0}^{k-1}I_\alpha\left[l_\alpha(t_i,X_i)\right]_{t_i}^{t_{i+1}}+I_\alpha\left[l_\alpha(t_i,X_i)\right]_{t_k}^{t}\right)\\
&+\sum_{\alpha\in\beta(\mathrm{A})}\left(\sum_{i=0}^{k-1}I_\alpha\left[l_\alpha(\cdot,X)\right]_{t_i}^{t_{i+1}}+I_\alpha\left[l_\alpha(\cdot,X)\right]_{t_k}^{t}\right)-Y_0\\
&-\sum_{\alpha\in\mathrm{A}_1\setminus\{v\}}\left(\sum_{i=0}^{k-1}I_\alpha\left[l_\alpha(t_i,Y_i)\right]_{t_i}^{t_{i+1}}+I_\alpha\left[l_\alpha(t_k,Y_k)\right]_{t_k}^{t}\right)\\
&-\sum_{\alpha\in\mathrm{A}_2}\left(\sum_{i=0}^{k-1}I_\alpha\left[l_\alpha(t_i,Y_i^*)\right]_{t_i}^{t_{i+1}}+I_\alpha\left[l_\alpha(t_k,Y_k^*)\right]_{t_k}^{t}\right)\\
&-\sum_{\alpha\in\beta(\mathrm{A}_3)}\left(\sum_{i=0}^{k-1}I_\alpha\left[l_\alpha(t_i,Y_i^*)\right]_{t_i}^{t_{i+1}}+I_\alpha\left[l_\alpha(t_k,Y_k^*)\right]_{t_k}^{t}\right)\Bigg|^2\\
=\Bigg|&\sum_{\alpha\in\mathrm{A}\setminus\{v\}}\left(\sum_{i=0}^{k-1}I_\alpha\left[l_\alpha(t_i,X_i)-l_\alpha(t_i,Y_i)\right]_{t_i}^{t_{i+1}}+I_\alpha\left[l_\alpha(t_k,X_k)-l_\alpha(t_k,Y_k)\right]_{t_k}^{t}\right)\\
&+\sum_{\alpha\in\beta(\mathrm{A}_3)}\left(\sum_{i=0}^{k-1}I_\alpha\left[l_\alpha(\cdot,X)-l_\alpha(\cdot,Y)\right]_{t_i}^{t_{i+1}}+I_\alpha\left[l_\alpha(\cdot,X)-l_\alpha(\cdot,Y)\right]_{t_k}^{t}\right)\\
&+\sum_{\alpha\in\beta(\mathrm{A}_4)}\left(\sum_{i=0}^{k-1}I_\alpha\left[l_\alpha(\cdot,X)\right]_{t_i}^{t_{i+1}}+I_\alpha\left[l_\alpha(\cdot,X)\right]_{t_k}^{t}\right)\\
&+\sum_{\alpha\in\beta(\mathrm{A}_3)}\left(\sum_{i=0}^{k-1}I_\alpha\left[l_\alpha(\cdot,Y)-l_\alpha(t_i,Y_i^*)\right]_{t_i}^{t_{i+1}}+I_\alpha\left[l_\alpha(\cdot,Y)-l_\alpha(t_i,Y_i^*)\right]_{t_k}^{t}\right)\\
&+\sum_{\alpha\in\mathrm{A}_2}\left(\sum_{i=0}^{k-1}I_\alpha\left[l_\alpha(t_i,Y_i)-l_\alpha(t_i,Y_i^*)\right]_{t_i}^{t_{i+1}}+I_\alpha\left[l_\alpha(t_k,Y_k)-l_\alpha(t_k,Y_k^*)\right]_{t_k}^{t}\right)\Bigg|^2
\end{aligned}\tag{5-35}$$

对(5-35)式，两边平方后先取上确界，再取条件期望得

$$E\left(\sup_{t\in[0,T]}\left|X(t)-Y(t)\right|^2\Big|\mathscr{F}_0\right)$$

$$\leq D_5\left(\sum_{\alpha\in\mathrm{A}\setminus\{v\}}R_t^\alpha+\sum_{\alpha\in\beta(\mathrm{A}_3)}S_t^\alpha+\sum_{\alpha\in\beta(\mathrm{A}_4)}U_t^\alpha+\sum_{\alpha\in\beta(\mathrm{A}_3)}Q_t^\alpha+\sum_{\alpha\in\mathrm{A}_2}P_t^\alpha\right),\tag{5-36}$$

其中

$$R_t^{\alpha}=E\left(\sup_{t\in[0,T]}\left|\sum_{i=0}^{k-1}I_{\alpha}\left[l_{\alpha}(t_i,X_i)-l_{\alpha}(t_i,Y_i)\right]_{t_i}^{t_{i+1}}+I_{\alpha}\left[l_{\alpha}(t_k,X_k)-l_{\alpha}(t_k,Y_k)\right]_{t_k}^{t}\right|^2|\mathscr{F}_0\right),$$

$$S_t^{\alpha}=E\left(\sup_{t\in[0,T]}\left|\sum_{i=0}^{k-1}I_{\alpha}\left[l_{\alpha}(\cdot,X)-l_{\alpha}(\cdot,Y)\right]_{t_i}^{t_{i+1}}+I_{\alpha}\left[l_{\alpha}(\cdot,X)-l_{\alpha}(\cdot,Y)\right]_{t_k}^{t}\right|^2|\mathscr{F}_0\right)$$

$$U_t^{\alpha}=E\left(\sup_{t\in[0,T]}\left|\sum_{i=0}^{k-1}I_{\alpha}\left[l_{\alpha}(\cdot,X)\right]_{t_i}^{t_{i+1}}+I_{\alpha}\left[l_{\alpha}(\cdot,X)\right]_{t_k}^{t}\right|^2|\mathscr{F}_0\right),$$

$$Q_t^{\alpha}=E\left(\sup_{t\in[0,T]}\left|\sum_{i=0}^{k-1}I_{\alpha}\left[l_{\alpha}(\cdot,Y)-l_{\alpha}(t_i,Y_i^{*})\right]_{t_i}^{t_{i+1}}+I_{\alpha}\left[l_{\alpha}(\cdot,Y)-l_{\alpha}(t_i,Y_i^{*})\right]_{t_k}^{t}\right|^2|\mathscr{F}_0\right),$$

$$P_t^{\alpha}=E\left(\sup_{t\in[0,T]}\left|\sum_{i=0}^{k-1}I_{\alpha}\left[l_{\alpha}(t_i,Y_i)-l_{\alpha}(t_i,Y_i^{*})\right]_{t_i}^{t_{i+1}}+I_{\alpha}\left[l_{\alpha}(t_k,Y_k)-l_{\alpha}(t_k,Y_k^{*})\right]_{t_k}^{t}\right|^2|\mathscr{F}_0\right).$$

在假设 5.1 下，依据引理 5.4 对 R_t^{α} 进行估计，

$$\begin{aligned}R_t^{\alpha}&=E\left(\sup_{t\in[0,T]}\left|\sum_{i=0}^{k-1}I_{\alpha}\left[l_{\alpha}(t_i,X_i)-l_{\alpha}(t_i,Y_i)\right]_{t_i}^{t_{i+1}}+I_{\alpha}\left[l_{\alpha}(t_k,X_k)-l_{\alpha}(t_k,Y_k)\right]_{t_k}^{t}\right|^2|\mathscr{F}_0\right)\\&\le D_6(\alpha)\int_0^T E\left(\sup_{s\in[0,t]}\left|l_{\alpha}(s,X(s))-l_{\alpha}(s,Y(s))\right|^2|\mathscr{F}_0\right)dt\\&\le D_6(\alpha)K_3^2(\alpha)\int_0^T E\left(\sup_{s\in[0,t]}\left|X(s)-Y(s)\right|^2|\mathscr{F}_0\right)dt\end{aligned}\tag{5-37}$$

在假设 5.1 下，依据引理 5.4 对 S_t^{α} 进行估计，

$$\begin{aligned}S_t^{\alpha}&\le D_7(\alpha)\int_0^T E\left(\sup_{s\in[0,t]}\left|l_{\alpha}(s,X(s))-l_{\alpha}(s,Y(s))\right|^2|\mathscr{F}_0\right)dt\\&\le D_7(\alpha)K_3^2(\alpha)\int_0^T E\left(\sup_{s\in[0,t]}\left|X(s)-Y(s)\right|^2|\mathscr{F}_0\right)dt\end{aligned}\tag{5-38}$$

现在根据引理 5.4，估计 U_t^{α}，

$$\begin{aligned}U_t^{\alpha}&\le D_8(\alpha)\Delta^2\int_0^T E\left(\sup_{s\in[0,t]}\left|l_{\alpha}(s,X(s))\right|^2|\mathscr{F}_0\right)dt\\&\le D_8(\alpha)\Delta^2K_4^2(\alpha)\int_0^T\left(1+E\left(\sup_{s\in[0,t]}\left|X(s)\right|^2|\mathscr{F}_0\right)\right)dt\\&\le\tilde{C}_2(\alpha)\Delta^2\end{aligned}\tag{5-39}$$

其中$\tilde{C}_2(\alpha)=D_8(\alpha)K_4^2(\alpha)T\left(1+C_2\left(1+E\|X(0)\|^2\right)\right)$.

在假设 5.1 下，依据引理 5.4 对Q_t^α进行估计，

$$Q_t^\alpha \le C_3(\alpha)\Delta\int_0^T E\left(\sup_{s\in[0,t]}\left|l_\alpha(s,Y(s))-l_\alpha\left(\left[\frac{s}{\Delta}\right]\Delta,Y^*_{\left[\frac{s}{\Delta}\right]}\right)\right|^2 |\mathscr{F}_0\right)dt$$

$$\le 2C_3(\alpha)K_3^2(\alpha)\Delta\int_0^T\left|s-\left[\frac{s}{\Delta}\right]\Delta\right|^2 dt+2C_3(\alpha)K_3^2(\alpha)\Delta\int_0^T E\left(\sup_{s\in[0,t]}\left|Y(s)-Y^*_{\left[\frac{s}{\Delta}\right]}\right|^2 |\mathscr{F}_0\right)dt$$

$$\le\frac{2}{3}TC_3(\alpha)K_3^2(\alpha)\Delta^3+2C_3(\alpha)K_3^2(\alpha)\Delta\int_0^T E\left(\sup_{s\in[0,t]}\left|Y(s)-Y^*_{\left[\frac{s}{\Delta}\right]}\right|^2 |\mathscr{F}_0\right)dt \tag{5-40}$$

考虑(5-40)中的$E\left(\sup_{s\in[0,t]}\left|Y(s)-Y^*_{\left[\frac{s}{\Delta}\right]}\right|^2 |\mathscr{F}_0\right)$，当$t\in[t_k,t_{k+1})$时，将引理 5.5 的结论代入

(5-34)式知$E\left(\sup_{0\le r\le t}\left|Y^*_{\left[\frac{r}{\Delta}\right]}\right|^2\middle|\mathscr{F}_0\right)$有界。再利用(5-28)式、(5-31)式、假设 5.1、假设 5.2、引理

5.4 和引理 5.5 可知

$$\begin{aligned}
E\left(\sup_{s\in[0,t]}\left|Y(s)-Y^*_{\left[\frac{s}{\Delta}\right]}\right|^2 |\mathscr{F}_0\right)&=E\left(\sup_{s\in[0,t]}\left|Y(s)-Y_{\left[\frac{s}{\Delta}\right]}+Y_{\left[\frac{s}{\Delta}\right]}-Y^*_{\left[\frac{s}{\Delta}\right]}\right|^2\middle|\mathscr{F}_0\right)\\
&\le 4E\left(\sup_{s\in[t_k,t]}\left|\sum_{\alpha\in A_1\setminus\{v\}}I_\alpha\left[l_\alpha(t_k,Y_k)\right]_{t_k}^s+\sum_{\alpha\in A_2}I_\alpha\left[l_\alpha(t_k,Y_k^*)\right]_{t_k}^s+\sum_{\alpha\in\beta(A_3)}I_\alpha\left[l_\alpha(t_k,Y_k^*)\right]_{t_k}^s\right.\right.\\
&\qquad\left.\left.-f\left(t_{\left[\frac{s}{\Delta}\right]},Y_{\left[\frac{s}{\Delta}\right]}\right)\Delta\right|^2\middle|\mathscr{F}_0\right)\\
&\le\tilde{D}_9\left(\sum_{\alpha\in A_1\setminus\{v\}}E\left(\sup_{s\in[t_k,t]}\left|I_\alpha\left[l_\alpha(t_k,Y_k)\right]_{t_k}^s\right|^2\middle|\mathscr{F}_0\right)+\sum_{\alpha\in A_2\cup\beta(A_3)}E\left(\sup_{s\in[t_k,t]}\left|I_\alpha\left[l_\alpha(t_k,Y_k^*)\right]_{t_k}^s\right|^2\middle|\mathscr{F}_0\right)\right)\\
&\quad+\tilde{D}_9E\left(\sup_{s\in[t_k,t]}\left|f\left(t_{\left[\frac{s}{\Delta}\right]},Y_{\left[\frac{s}{\Delta}\right]}\right)\Delta\right|^2\middle|\mathscr{F}_0\right)\\
&\le\tilde{D}_{10}\Delta\int_{t_k}^t E\left(\left|l_\alpha(t_k,Y_k)\right|^2\middle|\mathscr{F}_0\right)ds+\tilde{D}_{10}\int_{t_k}^t E\left(\left|l_\alpha(t_k,Y_k^*)\right|^2\middle|\mathscr{F}_0\right)ds
\end{aligned}$$

$$+\tilde{D}_{10}\Delta^2\left(1+E\left(\left|Y_{\left[\frac{t}{\Delta}\right]}\right|^2\middle|\mathscr{F}_0\right)\right)$$

$$\le\tilde{D}_{11}\Delta^2\left(1+E\left(\left|Y_k\right|^2\middle|\mathscr{F}_0\right)\right)+\tilde{D}_{11}\Delta\left(1+E\left(\left|Y_k^*\right|^2\middle|\mathscr{F}_0\right)\right)$$

$$\le\tilde{D}_{12}(\alpha)\Delta \tag{5-41}$$

将(5-41)带入(5-40)得

$$Q_t^\alpha\le\frac{2}{3}TC_3(\alpha)K_3^2(\alpha)\Delta^3+2C_3(\alpha)\tilde{D}_{12}(\alpha)K_3^2(\alpha)T\Delta^2$$

$$\le\tilde{C}_3(\alpha)\Delta^2 \tag{5-42}$$

在假设 5.1 和假设 5.2 下，利用式(5-28)、引理 5.4、引理 5.5 对 P_t^α 进行估计，

$$P_t^\alpha=E\left(\sup_{t\in[0,T]}\left|\sum_{i=0}^{k-1}I_\alpha\left[l_\alpha(t_i,Y_i)-l_\alpha(t_i,Y_i^*)\right]_{t_i}^{t_{i+1}}+I_\alpha\left[l_\alpha(t_k,Y_k)-l_\alpha(t_k,Y_k^*)\right]_{t_k}^{t}\right|^2\middle|\mathscr{F}_0\right)$$

$$\le D_9(\alpha)\int_0^T E\left(\left|l_\alpha\left(\left[\frac{s}{\Delta}\right]\Delta,Y_{\left[\frac{s}{\Delta}\right]}\right)-l_\alpha\left(\left[\frac{s}{\Delta}\right]\Delta,Y^*_{\left[\frac{s}{\Delta}\right]}\right)\right|^2\middle|\mathscr{F}_0\right)ds$$

$$\le D_9(\alpha)K_3^2(\alpha)\int_0^T E\left(\left|Y_{\left[\frac{s}{\Delta}\right]}-Y^*_{\left[\frac{s}{\Delta}\right]}\right|^2\middle|\mathscr{F}_0\right)ds$$

$$\le D_9(\alpha)K_3^2(\alpha)\int_0^T E\left(\left|f\left(\left[\frac{s}{\Delta}\right]\Delta,Y_{\left[\frac{s}{\Delta}\right]}\right)\Delta\right|^2\middle|\mathscr{F}_0\right)ds$$

$$\le D_9(\alpha)K_3^2(\alpha)K_2^2\Delta^2\int_0^T\left(1+E\left(\left|Y_{\left[\frac{s}{\Delta}\right]}\right|^2\middle|\mathscr{F}_0\right)\right)ds$$

$$\le\tilde{C}_1(\alpha)\Delta^2 \tag{5-43}$$

其中 $\tilde{C}_1(\alpha)=D_7(\alpha)K_3^2(\alpha)K_2^2(1+D_3(\alpha))T$。

将(5-37)-(5-39)和(5-42)-(5-43)代入(5-36)可得

$$E\left(\sup_{t\in[0,T]}|X(t)-Y(t)|^2|\mathscr{F}_0\right)\le\tilde{C}_3(\alpha)\left((D_6(\alpha)+D_7(\alpha))K_3^2(\alpha)\int_0^T E\left(\sup_{s\in[0,t]}|X(s)-Y(s)|^2|\mathscr{F}_0\right)dt+\tilde{C}_1(\alpha)\Delta^2+\tilde{C}_3(\alpha)\Delta^2+\tilde{C}_2(\alpha)\Delta$$

$$\le\tilde{C}_4(\alpha)\int_0^T E\left(\sup_{s\in[0,t]}|X(s)-Y(s)|^2|\mathscr{F}_0\right)dt+\tilde{C}_4(\alpha)\Delta^2$$

运用 Gronwall 不等式可得

$$E\left(\sup_{t\in[0,T]}\left|X(t)-Y(t)\right|^2\big|\mathscr{F}_0\right)\le C\Delta^2,$$

其中$C=\tilde{C}_4(\alpha)e^{\tilde{C}_4(\alpha)T}$.

定理 5.1 表明在均方意义下离散解$Y(t)$以速度 1 收敛于随机过程$X(t)$。文献[25]给出了欧拉算法的一阶显式，即

$$\begin{aligned}Y_{k+1}^{\Delta}=&Y_k^{\Delta}+f\left(t_k,Y_k^{\Delta}\right)\Delta+g\left(t_k,Y_k^{\Delta}\right)\Delta W_k+h\left(t_k,Y_k^{\Delta}\right)\Delta N_k\\&+\frac{1}{2}g\left(t_k,Y_k^{\Delta}\right)g_x^{'}\left(\left(\Delta W_k\right)^2-\Delta N_k\right)\\&+\frac{1}{2}\left(h\left(t_k,Y_k^{\Delta}+h\left(t_k,Y_k^{\Delta}\right)\right)-h\left(t_k,Y_k^{\Delta}\right)\right)\left(\left(\Delta N_k\right)^2-\Delta N_k\right)\\&+\left(g\left(t_k,Y_k^{\Delta}+h\left(t_k,Y_k^{\Delta}\right)\right)-g\left(t_k,Y_k^{\Delta}\right)\right)\Delta W_k\Delta N_k\\&+\left(g\left(t_k,Y_k\right)\left(h_x^{'}\left(t_k,Y_k\right)+1\right)-g\left(t_k,Y_k+h\left(t_k,Y_k\right)\right)\right)\times\sum_{i=N_{t_k}+1}^{N_{t_{k+1}}}\left(W_{(\Gamma(i))}-W_{t_k}\right)\end{aligned}\tag{5-44}$$

下面用一个例子来比较本文的 Split-step 算法(5-28)、(5-29)与欧拉算法(5-44)。令$T=1,X_0=10,\lambda=50$。方程(5-1)的系数分别为$f(t,x)=2x,g(t,x)=\frac{1}{2}x,h(t,x)=-\frac{1}{10}x$，方程(5-1)的解析解为

$$X(t)=10\left(\frac{9}{10}\right)^{N_t}\exp\left\{\frac{15}{8}t+\frac{1}{2}W_t\right\}。$$

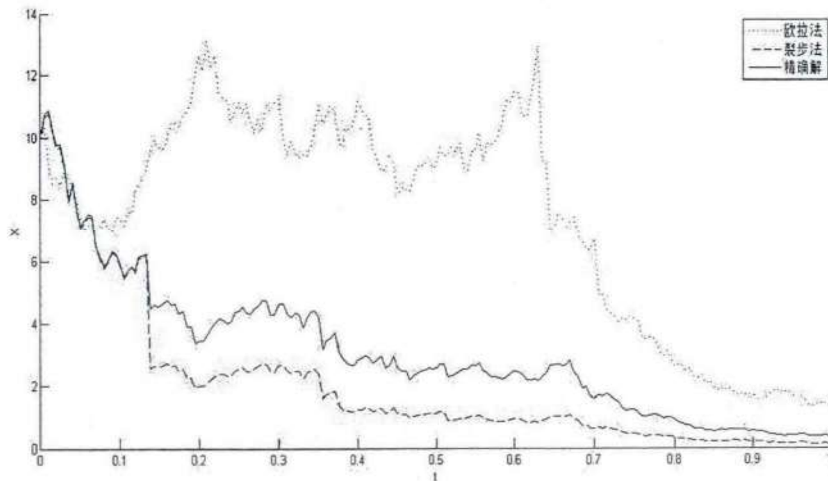


图 5.1 两种算法得到的近似解和精确解的路径

Fig. 5.1 Exact Solution, Solution of the order 1 Euler-Maruyama scheme and of the order 1 Split-step scheme

文中所给出的近似解和误差是 100 次计算结果的均值。图 5.1 给出$\Delta=0.01$的 Split-step 算法的一阶近似解和 Euler-Maruyama 算法一阶近似解及精确解，从图 5.1 可以

看出 Split-step 算法的数值更近似于精确解. 图 5.2 显示的是 Split-step 算法的一阶近似解和 Euler-Maruyama 算法一阶近似解与精确解之间的误差，由图 5.2 可知，Split-step 算法的一阶近似解与精确解之间的误差更小。此例说明 Split-step 算法要优于 Euler-Maruyama 算法。

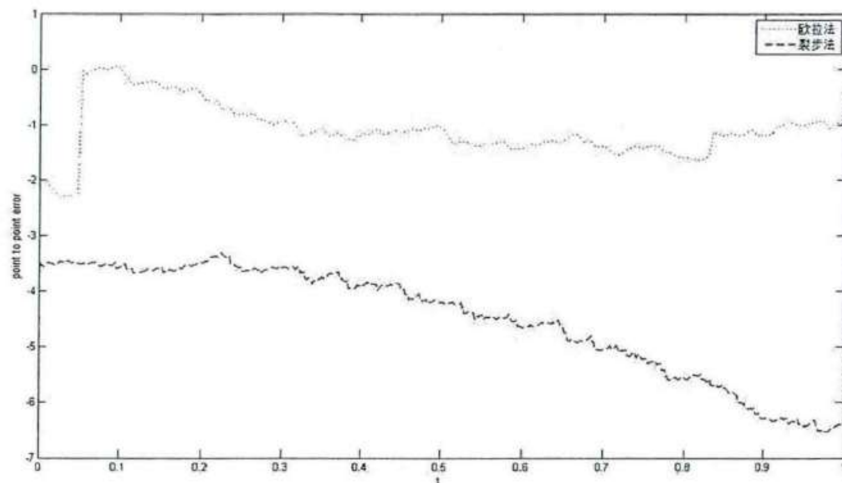


图 5.2 离散解与精确解取对数后的误差

Fig. 5.2 Point mean square errors of the Euler scheme and of the Split-step scheme in a logarithmic scale

第6章 总结与展望

6.1 总结

本文给出了三种求解带跳的随机微分方程数值解的算法。针对一类带跳的随机微分方程，本文给出了基于 Euler-Maruyama 法的 Split-Step 算法，证明了当方程的系数满足 Lipschitz 条件和线性增长条件，且时滞函数满足一定的条件时，Split-Step 算法的收敛速率是$\alpha \wedge \gamma \wedge \frac{1}{2}$，并通过两个数值实例验证了算法的有效性。随后，对不含有时滞项的 Split-Step 算法做加权得到了$SS\theta$算法，证明了当方程的系数满足 Lipschitz 条件和线性增长条件时，$SS\theta$算法近似解的收敛速率是$\frac{1}{2}$。然后，将$SS\theta$算法推广到了带时滞项的情况下，证明了带跳的随机延迟微分方程近似解的收敛速率是$\frac{1}{2}$。在最后一部分，本文应用$It\hat{o}-Taylor$展开式对 Split-Step 算法做二阶展开，得到$It\hat{o}-Taylor$展开的近似解，并证明了所得的近似解的收敛速率是 1。

6.2 展望

在文章的最后，我们提出关于随机微分方程数值解方面的工作今后可以做如下展开：

(1)我们的方程所考虑的泊松跳是一个泊松过程，但实际上更一般的可以考虑将跳过程推广到泊松跳测度。

(2)我们在证明 Split-Step 算法一阶近似解的收敛速率时，并没有考虑时滞项，因此随机微分方程中引入时滞项也是可以继续探讨的工作之一。

参考文献

[1] Blenman L P, Cantrell R S, Fennell R E, Parker D F, Reneke J A, Wang L F S, Womer N K. An alternative approach to stochastic calculus for economic and financial models[J]. Econ, 1995, Dyn. Con. 19, 553_568.

[2] Ball F G, Lyne O D. Optimal vaccination policies for stochastic epidemics among a population of households[J]. Math. Biosci, 2002, 177 & 178, 333-354.

[3] Mao Xuerong. Stochastic Differential Equations and their Applications[M]. Harwood, New York, 1997.

[4] Øksendal B. Stochastic Differential Equations[M]. Springer, Berlin, 2005.

[5] Higham D J. An algorithmic introduction to numerical simulation of stochastic differential equations[J]. SIAM Rev, 2001, 43, 525-546.

[6] Kloeden P E, Platen E. Numerical Solution of Stochastic Differential Equations[M]. Springer-Verlag, Berlin, 1992.

[7] Maruyama G. Continuous Markov processes and stochastic equations[J]. Rend. Circ. Mat, Palermo 4, 1955, 48-90.

[8] Milstein G N. Approximate integration of stochastic differential equations[J]. Theory Probab, 1974, Appl. 19 , 557-562.

[9] Milstein G N. Numerical Integration of Stochastic Differential Equations[M]. Kluwer, Dordrecht, 1995.

[10]Platen E. An introduction to numerical methods for stochastic differential equations[J]. Acta Numer, 1999, 8, 197-246.

[11]Burrage K, Tian T H. The composite Euler method for solving stiff stochastic differential equations[J]. Computational and Applied Mathematics, 2001, 131, 407-426.

[12]Wang Peng. Three-stage stochastic Runge_Kutta methods for stochastic differential equations[J]. Computational and Applied Mathematics, 2008, 222, 324-332.

[13]Omar M A. Aboul-Hassan A. Rabia S I. The composite Milstein methods for the numerical solution of Ito stochastic differential equations[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2011, 235(8), 2277-2299.

[14]Wang Peng, Li Yong. Split-step forward methods for stochastic differential equations[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2010, 233(10), 2641-2651.

[15]Higham D J. A-stability and stochastic mean-square stability[J]. BIT, 2000, 40 (2), 404-409.

[16]Ding Xiaohua, Ma Qiang, Zhang Lei. Convergence and stability of the split-step θ-method for stochastic differential equations[J]. Computers & Mathematics with

Applications, 2010, 60(5), 1310-1321.

[17]Safique Ahmadl Sk. Nigam Chandra Parida, Soumyendu Raha, The fully implicit stochastic-a method for stiff stochastic differential equations[J]. Journal of Computational Physics, 2009, 228(22), 8263-8282.

[18]Zhang Kai, Zhang Ran, Yin Yunguang, Yu Shi. Domain decomposition methods for linear and semi-linear elliptic stochastic partial differential equations[J]. Applied Mathematics and Computation, 2008, 195(2), 630-640.

[19]Buckwar E. Introduction to the numerical analysis of stochastic delay differential equations[J]. Computational and Applied Mathematics, 2000, 125(4), 297-307.

[20]Liu X Q, Li C W. Weak approximations and extrapolations of stochastic differential equations with jumps[J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 2004, 37 (6), 1747-1767.

[21]Kubilius K, Platen E. Rate of weak convergence of the Euler approximation for diffusion processes with jumps[J]. Monte Carlo Methods and Applications, 2002, 8(1), 83-96.

[22]Protter P, Talay D. The Euler scheme for Levy driven stochastic differential equations[J]. Annals of Probability, 1997, 25, 393-423.

[23]Wang Xiaojie, Gan Siqing. Compensated stochastic theta methods for stochastic differential equations with jumps[J]. Applied Numerical Mathematics, 2010, 60(9), 877-887.

[24]Zhang Haomin. The split-step backward Euler method for linear stochastic delay differential equations[J]. Mathematical and Computer Modelling, 2010, 51(5-6), 504-515.

[25]Gardoń A. The order of approximations for solutions of Itô-type stochastic differential equations with jumps[J]. Stochastic analysis and applications, 2005, 22(3): 679-699.

[26]Jiang Feng, Shen Yi, Liu Lei. Taylor approximation of the solutions of stochastic differential delay equations with Poisson jump[J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2011, 16(2), 798-804.

[27]Wang Lasheng, Mei Changlin, Xue Hong. The semi-implicit Euler method for stochastic differential delay equation with jumps[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2011, 235(8), 2569-2580.

[28]Bao Jianhai, Böttcher Björn, Mao Xuerong, Yuan Chenggui. Convergence rate of numerical solutions to SFDEs with jumps[J]. Computational and Applied Mathematics. 236 (2011), no. 2, 119–131.

[29]Bao J, Yuan C. Convergence rate of EM scheme for SDDEs[J]. Proceedings of the American Mathematical Society, 2013, 141(9): 3231-3243.

[30]Sobczyk K. Stochastic differential equations with applications to physics and engineering[M]. Kluwer Academic, Dordrecht, 1991.

[31]裘饕辰. 带跳的随机延迟微分方程的Split-Step算法[D]. 华东理工大学, 2013年.

[32]Tocino A, Vigo-Aguiar J. Weak second order conditions for stochastic Runge-Kutta methods[J]. SIAM Journal on Scientific Computing, 2002, 24(2):507-523.

[33]Rößler A. Runge–Kutta methods for Itô stochastic differential equations with scalar noise[J]. BIT Numerical Mathematics, 2006, 46(1): 97-110.

[34]Debrabant K, Rößler A. Families of efficient second order Runge–Kutta methods for the weak approximation of Itô stochastic differential equations[J]. Applied numerical mathematics, 2009, 59(3): 582-594.

[35]Platen E，Wagner W．On a Taylor formula for a class of Ito processes [J]. Probability and Mathematical Statistics，1982，3(1)：37—51．

[36]Rumelin W. Numerical treatment of stochastic differential equations [J]. SIAM J．Numer．Anal．1982．19：604．613．

[37]Tian T，Burrage K．Implicit Taylor methods for stiff stochastic differential equations [J]．Applied Numerical Mathematics，2001，38：167—185．

[38]Tan Jianguo, Wang Hongli. Mean-square stability of the Euler–Maruyama method for stochastic differential delay equations with jumps[J]. International Journal of Computer Mathematics, 2011, 88(2): 421-429.

[39]周立群, 张敬, 王红等. 线性随机延迟微分方程复合θ-方法的收敛性[J]. 黑龙江大学自然科学学报,2007,24(6):778-783.

[40]Protter P. Stochastic integration and differential equations[M]. Springer, 1990.

[41] 贾俊梅. 求解随机微分方程 split-step 欧拉方法的收敛性[J]. 烟台大学学报（自然科学与工程版）,2014,27(2):90-94.

[42] Wang Peng，Li Yong．Split-step forward methods for stochastic differential equations[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics，2010，233：2641—2651．

[43] 张雨馨, 王鹏. 随机微分方程 Milstein 方法的几乎必然及矩指数稳定性[J]. 吉林大学学报（理学版）,2011,49(6):1058-1060.

[44] 李启勇. 随机微分方程改进半隐 Milstein 方法的稳定性[J]. 怀化学院学报,2012,30(5):1-6.

[45] Cao Wanrong, Hao Peng, Zhang Zhongqiang. Split-step θ-method for stochastic delay differential equations[J]. Applied Numerical Mathematics.2014.

[46] Rathinasamy A, Balachandran K. T-stability of the split-step θ-methods for linear stochastic delay integro-differential equations[J]. Nonlinear Analysis: Hybrid Systems. 2011 (No.4).

[47]唐占涛, 苏欢, 丁效华. 随机延迟微分方程SST方法的稳定性[J]. 黑龙江大学自然科学学报,2014,31(1);13-20.

[48]李启勇，甘四清，张浩敏. 随机延迟积分微分方程改进分步向后 Euler 方法的均方指数稳定性[J]. 数值计算与计算机应用,2013,34(4);241-248.
[49]郝朝鹏. 求解随机延迟微分方程的分步向前 Euler 方法[J]. 黑龙江大学自然科学学报,2013,(2);180-186.
[50]郭谦，解雯雯. 线性随机时滞微分方程裂步 Milstein 方法的收敛性[J]. 应用数学与计算数学学报,2012,26(4);456-464.

致谢

近三年的硕士研究生生活即将结束，在论文完成之际，我思绪万千，心情久久不能平静。回顾这大半年来的写作过程，我得到过许多人的关怀和帮助。在此，我要向他们表达我最诚挚的谢意。

首先，衷心地感谢我的导师秦衍教授。当我面对科学的高峰有些彷徨时，是导师在鼓励我，“攻坚莫畏难，只怕肯登攀”；当我在科学的殿堂中步履蹒跚时，是导师在指点我，“问渠哪得清如许，为有源头活水来”；当我埋头于书本执迷不悟时，是导师在明示我，“纸上得来终觉浅，绝知此事要躬行”；当我在实际工作中遇到困难时，是导师在引导我，“壁立千仞无欲则刚，海纳百川有容乃大”。我的导师，学识渊博，对专业孜孜以求，精益求精。百忙之余仍然读书不辍，不断探求；为人师表，率先垂范；传道授业，呕心沥血。如果说我从导师那里学会了怎样做好学问，那么首先应该说我从导师那里领略了真正的学术精神，导师严谨的治学态度和坚韧的探索精神将使我终生受益。

衷心感谢我的师姐王汀、廖盼盼、师妹张丹和翟丹丹同学，每次在讨论班上和你们交流都会拓宽我的思路，使我受益匪浅。

衷心感谢所有在学习和生活上帮助过我的老师们和同学们，我会永远铭记和你们在一起时的欢乐时光，珍惜这份来之不易的友情。

最后，再一次感谢所有在我的硕士学习生涯中帮助过我的良师益友和同学，以及在论文中被我引用或参考的文献的作者。